



חוברת שיעורי-בית

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (52113)

סטטיסטיקה ומדעי הנתונים

תוכן עניינים

4	הקדמה
5	אינטגרלים לא מסוימים
5	שאלה מספר 1 – אינטגרציה בחלקים
6	שאלה מספר 2 – שיטת ההצבה
7	שאלה מספר 3 – אינטגרלים טריגונומטריים
9	אינטגרלים מסוימים
9	שאלה מספר 4 – אינטגרל מסוים כללי
10	שאלה מספר 5 – המשפט היסודי של החדו"א
14	שאלה מספר 6 – חקירת פונקציה קדומה
18	שאלה מספר 7 – תכונות האינטגרל
19	אינטגרלים מוכללים
19	שאלה מספר 8 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון
21	שאלה מספר 9 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון
22	שאלה מספר 10 – אינטגרל מוכלל מסוג שני
23	שאלה מספר 11 – אינטגרל מוכלל מסוג שני
24	שאלה מספר 12 – אינטגרל מוכלל מסוג שני
25	שאלה מספר 13 – אינטגרל מוכלל מסוג שני
26	שאלה מספר 14 – התכנסות מוחלטת או בתנאי
29	שאלה מספר 15 – התכנסות מוחלטת או בתנאי
30	שאלה מספר 16 – אינטגרלים מוכללים
32	שאלה מספר 17 – אינטגרלים מוכללים ומבחני השוואה
34	טורים – מבחני השוואה
34	שאלה מספר 18 – מבחני השוואה

- שאלה מספר 19 – מבחני השוואה..... 35
- שאלה מספר 20 – מבחני השוואה..... 37
- שאלה מספר 21 – מבחני השוואה..... 39
- שאלה מספר 22 – מבחני השוואה..... 41
- שאלה מספר 23 – טורי חל-ים..... 42
- שאלה מספר 24 – הוכח/הפוך..... 43
- שאלה מספר 25 – תנאי הכרחי להתכנסות הטור..... 44
- שאלה מספר 26 – הוכח/הפוך..... 46
- שאלה מספר 27 – הוכח/הפוך..... 47
- שאלה מספר 28 – הוכח/הפוך..... 48
- שאלה מספר 29 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי..... 49
- שאלה מספר 30 – טור טלסקופי..... 51
- שאלה מספר 31 – טורים ומבחני השוואה..... 53
- שאלה מספר 32 – טורי מספרים..... 56
- שאלה מספר 34 – טורים ומבחני השוואה..... 60
- שאלה מספר 35 – טור ואינטגרל מוכלל..... 61
- טורי חזקות..... 63**
- שאלה מספר 36 – רדיוס התכנסות..... 63
- שאלה מספר 37 – רדיוס התכנסות..... 64
- שאלה מספר 38 – רדיוס התכנסות..... 65
- שאלה מספר 39 – רדיוס התכנסות..... 66
- שאלה מספר 40 – רדיוס התכנסות..... 67
- שאלה מספר 41 – תחום התכנסות..... 68
- שאלה מספר 42 – תחום התכנסות..... 70
- שאלה מספר 43 – תחום התכנסות..... 71
- שאלה מספר 44 – תחום התכנסות..... 72
- שאלה מספר 45 – תחום התכנסות..... 74
- שאלה מספר 46 – תחום התכנסות..... 77
- שאלה מספר 47 – תחום התכנסות..... 79
- שאלה מספר 48 – תחום התכנסות של טור מוזז..... 80
- שאלה מספר 49 – תחום התכנסות של טור מוזז..... 82
- שאלה מספר 50 – תחום התכנסות של טור מוזז..... 84
- שאלה מספר 51 – תחום התכנסות של טור מוזז..... 86
- שאלה מספר 52 – סכום שני טורים – מבחני התכנסות בהחלט..... 88
- שאלה מספר 53 – בניית טור חזקות..... 90

91.....	שאלה מספר 54 – טורי חזקות.....
94.....	שאלה מספר 55 – סכום הטור – טורי מקלורן.....
95.....	שאלה מספר 56 – סכום הטור – טורי מקלורן.....
97.....	שאלה מספר 57 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה.....
99.....	שאלה מספר 58 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה.....
101.....	שאלה מספר 59 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה.....
103.....	שאלה מספר 60 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר.....
105.....	שאלה מספר 61 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר.....
107.....	שאלה מספר 62 – שאלת מח חריף.....
109.....	בעיות אקסטרמום
109.....	שאלה מספר 63 – מינימום ומקסימום מוחלטים.....
114.....	שאלה מספר 64 – כופלי לגרנז'.....
119.....	שאלה מספר 65 – מיון נקודות חשודות לקיצון.....
122.....	שאלה מספר 66 – מינימום ומקסימום תחת אילוץ.....
125.....	שאלה מספר 67 – כופלי לגרנז'.....
128.....	שאלה מספר 68 – בעיית מינימום.....
131.....	אינטגרלים כפולים
131.....	שאלה מספר 69 – אינטגרל כפול בריבוע היחידה.....
132.....	שאלה מספר 70 – שטח תחום.....
134.....	שאלה מספר 71 – מסת תחום.....
137.....	שאלה מספר 72 – תחום חסום.....
139.....	שאלה מספר 73 – צפיפות משטחית.....
141.....	שאלה מספר 74 – החלפת סדר אינטגרציה.....
144.....	שאלה מספר 75 – החלפת סדר אינטגרציה.....

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת שיעורי-הבית?

גילוי נאות – אני מאוהב במתמטיקה. שהרי מה תפקיד המתמטיקאי בעולם אם לא לחשוף עוד טפח מהמציאות המרתקת הסובבת אותנו – ממש כמו הארכיאולוג כך גם המתמטיקאי לא מוצא או ממצא, אלא מגלה וחושף אמיתות עתיקות שחיכו בבטן האדמה המתמטית לגילויים לעולם.
חוברת זו המונחת לפניכם מכילה עשרות שאלות שכתבתי עבורכם לאור נסיוני במשך שנים רבות בלימוד המתמטיקה ובחדו"א בפרט החל מהסמסטר השלישי שלי בתואר בטכניון ועד היום. כעת, כדי לעבוד נכון עם החוברת, אנא קראו בעיון את הדגשים הבאים:

(1) צפייה במרתון המצולם – הדגש הראשון לעבודה נכונה עם החוברת הוא לצפות בקורס באתר סטאדיס ולוודא שאתם מבינים את כל השאלות שם. השאלות במרתון הן שאלות שאוהבים לשאול במבחנים ושאלות שמופיעות כל הזמן במבחנים. מפאת אילוצי הזמן במרתון, בניתי חוברת זו שאליה הכנסתי את כל השאלות שלא הספקתי לפתור במרתון. לכל השאלות צירפתי פתרון מסודר וברור ככל הניתן.

(2) עבודה נכונה עם החוברת – הדרך הנכונה ביותר לעבוד עם החוברת היא לפתור בה את כל התרגילים עד לנושא שאליו הגעתם בקורס. למשל אם התקדמנו עד נושא רציפות וגזירות, אז תוכלו לפתור את כל השאלות בחוברת עד נושא זה. וכך הלאה ממשיכים להתקדם עד לפתרון כל תרגילים בחוברת.

(3) יש לזכור שבמקביל לעבודה עם חוברת זו יש להמשיך לעבוד ולהתקדם בשאר האגפים –
להמשיך לצפות בקורס, להמשיך לשנן הוכחות ולהמשיך לשנן מושגים והגדרות מחוברת סיכום הקורס.
תעבדו לפי שלבים אלו ובעזרת ה' תראו הצלחה.

בהצלחה!

אינטגרלים לא מסוימים

אינטגרציה בחלקים

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\int (uv)' = \int u'v + \int v'u$$

$$\int v'u = \int (uv)' - \int u'v$$

$$\boxed{\int v'u = uv - \int u'v}$$

שאלה מספר 1 – אינטגרציה בחלקים

חשב את האינטגרל הבא לכל $a, b > 0$:

$$\int \ln(ax^2 + b) dx$$

פתרון

$$\int \ln(ax^2 + b) dx = x \ln(ax^2 + b) - 2a \underbrace{\int \frac{x^2}{ax^2 + b} dx}_{(1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln(ax^2 + b) \quad v' = 1 \\ u' = \frac{2ax}{ax^2 + b} \quad v = x \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (1): \int \frac{x^2}{ax^2 + b} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{ax^2}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{ax^2 + b - b}{ax^2 + b} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int 1 dx - \frac{1}{a} \int \frac{b}{ax^2 + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{b}{b\left(\frac{ax^2}{b} + 1\right)} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)^2\right)} dx = \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)$$

ואם נחזור לאינטגרציה בחלקים בסך הכל נקבל:

$$\begin{aligned} \int \ln(4x^2 + 3) dx &= x \ln(ax^2 + b) - 2a \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right) \right) = \\ &= x \ln(ax^2 + b) - 2x + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right) + C \end{aligned}$$

שאלה מספר 2 – שיטת ההצבה

חשב את האינטגרל הבא: $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$

פתרון

דרך ראשונה - באמצעות הצבה

$$e^x = t$$

$$e^x dx = dt \quad \text{נציב:}$$

$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx &= \int \frac{t^2 + 1}{t} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \int 1 dt + \int \frac{1}{t^2} dt = t - \frac{1}{t} + c = t - t^{-1} + c = e^x - e^{-x} + c \end{aligned}$$

דרך שנייה - באופן ישיר

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx &= \int \frac{(e^x)^2 + 1}{e^x} dx = \int \left(\frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \\ &= \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + c \end{aligned}$$

שאלה מספר 3 – אינטגרלים טריגונומטריים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx \quad (\text{ג})$$

פתרון סעיף א'

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x}$$

נציב:

$$t = \sin x$$

$$dt = \cos x dx$$

נחזור לאינטגרל:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} \right) dt =$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{2} \ln|1-t| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$$

פתרון סעיף ב'

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

פתרון סעיף ג'

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \\ &= \underbrace{\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{1}{\cos x} dx}_{(2)}^*\end{aligned}$$

$$(1) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = -\int \sin x \frac{(-\sin x)}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \sin x \quad v' = \frac{-\sin x}{\cos^3 x} \\ u' = \cos x \quad v = -\frac{1}{2 \cos^2 x} \end{array} \right| = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{1}{\cos x} dx}_{(2)}$$

$$\begin{aligned}&^* = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx + \int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos x} dx = \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C\end{aligned}$$

אינטגרלים מסוימים

שאלה מספר 4 – אינטגרל מסוים כללי

$$\cdot \begin{cases} f(1) = e \\ f(10) = e^2 \end{cases} \quad \text{נתונה } f(x) \text{ פונקציה גזירה וחיובית המקיימת:}$$

$$\int_1^{10} f'(x) \ln(f(x)) dx \quad \text{חשב את ערך האינטגרל הבא:}$$

פתרון

$$\int_1^{10} f'(x) \ln(f(x)) dx = f(x) \ln f(x) \Big|_1^{10} - \int_1^{10} \frac{f'(x)}{\cancel{f(x)}} \cancel{f(x)} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln f \quad v' = f' \\ u' = \frac{f'}{f} \quad v = f \end{array} \right| = \left[f(10) \ln(f(10)) - f(1) \ln f(1) \right] - (f(10) - f(1)) =$$

$$= e^2 \ln e^2 - e \ln e - (e^2 - e) = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

שאלה מספר 5 – המשפט היסודי של החדו"א

נתונה הפונקציה הבאה: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt + 1$. אזי:

א. $F(x)$ קמורה על $(-\infty, \infty)$.

ב. למשוואה $F(x) = 0$ שני פתרונות.

ג. הפונקציה $F(x)$ הפיכה ומתקיים כי $(F^{-1})'(1) = 1$.

ד. $F(1) = 5$.

ה. $F(x) = F(-x)$ לכל x .

תזכורות

משפט

תהי $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$ ונסמן: $M = \sup_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, אזי:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

משפט

אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$ אזי $f(x)$ אינטגרבילית.

משפט

תהי פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a, b]$ אזי הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ רציפה ב- $[a, b]$.

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ורציפה בנקודה $x_0 \in [a, b]$ אזי $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad \text{גזירה ב- } x_0 \text{ ומתקיים:}$$

הערות: (1) במילים אחרות F היא הפונקציה הקדומה של f .

(2) אם x_0 נקודת קצה של הקטע, אזי הנגזרת היא חד-צדדית.

מבחן הנגזרת שנייה לקמירות וקעירות

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים ב- (a, b) אזי:

(א) אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ קמורה ב- (a, b) .

(ב) אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ קעורה ב- (a, b) .

מסקנות משפט לגרנז'

תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) אזי:

(א) אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ קבועה ב- $[a, b]$.

(ב) אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ מונוטונית עולה ב- $[a, b]$.

(ואם $f'(x) \leq 0$ אז היא מונוטונית יורדת)

(ג) אם $f'(x) > 0$ לכל $x \in (a, b)$ אזי $f(x)$ מונוטונית עולה ממש ב- $[a, b]$.

(ואם $f'(x) < 0$ אז היא מונוטונית יורדת ממש)

בדיקת טענה א'

$f(x) = e^{x^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ כהרכבה של פונקציות אלמנטריות רציפות בכל $\mathbb{R}$, לכן f

אינטגרבילית ולכן לפי המשפט היסודי F גזירה ומתקיים: $F'(x) = e^{x^2}$

F' גזירה כהרכבה של פונקציות גזירות לכן: $F''(x) = 2xe^{x^2}$

לכל $x > 0$, $F'' > 0$ ולכן לפי מבחן הנגזרת השנייה F קמורה שם,

ולכל $x < 0$, $F'' < 0$ ולכן לפי מבחן הנגזרת השנייה F קעורה שם.

כלומר טענה א' לא נכונה.

בדיקת טענה ב'

$F'(x) = e^{x^2} > 0$ לכל x , כלומר ל- F' אין שורשים ולכן לפי מסקנה ממשפט רול ל- F יש לכל

היותר שורש יחיד. לכן טענה ב' לא נכונה.

בדיקת טענה ג'

$F'(x) = e^{x^2} > 0$ ולכן לפי מסקנות לגרנד' F מונוטונית עולה ממש ולכן חד-חד-ערכית.

כמו-כן כל פונקציה היא על התמונה שלה ולכן בסך הכל f חח"ע ועל ולכן הפיכה.

כמו-כן נשים לב כי $F(0) = 1$, כלומר עבור $y = 1$ מתקבל $x = 0$:

$$F(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$(F^{-1})'(y_0) = \frac{1}{F'(x_0)}$$

מכאן מתקיים:

$$(F^{-1})'(1) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{e^{0^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

כלומר טענה ג' נכונה.

נמשיך בכל זאת לבדוק את שאר הטענות כדי לתרגל:

בדיקת טענה ד'

$$F(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt + 1$$

$f(x) = e^{x^2}$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$ ומתקיים: $1 \leq e^{x^2} \leq e$ לכל $0 \leq x \leq 1$. לכן לפי משפט:

$$1 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq e / +1$$

$$2 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt + 1 \leq e + 1$$

$$2 \leq F(1) \leq e + 1 < 5$$

כלומר:

לכן טענה ד' לא נכונה.

בדיקת טענה ה'

אם F זוגית אזי F' אי-זוגית (וגם אם F אי-זוגית אזי F' זוגית) (ראה שאלת שיעורי-הבית – הקשר שבין זוגיות וגזירות). אזי נניח בשלילה כי F זוגית, לכן בהכרח F' אי-זוגית:

$$F'(x) = e^{x^2}$$

אבל $F'(-x) = e^{x^2} = F'(x)$ כלומר F' זוגית, קיבלנו סתירה, לכן בהכרח F לא זוגית. כלומר טענה ה' לא נכונה.

שאלה מספר 6 – חקירת פונקציה קדומה

$$\text{נגדיר } F(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt$$

(א) הוכיחו כי $F(x) > 0$ לכל x ממשי ולכן אין לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

(ב) מצאו את תחומי העליה והירידה של $F(x)$ ואת ערכי x של נקודות הקיצון המקומי.

(ג) הראו כי $0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$ לכל $x > 0$ והסיקו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$.

תזכורת – משפט

$$\text{אם } f(x) \text{ אינטגרבילית בקטע } [a, b] \text{ ו- } f(x) > 0 \text{ אזי גם } \int_a^b f(x) dx > 0$$

פתרון סעיף א'

$f(t) = e^{-t^2}$ פונקציה אלמנטרית רציפה בכל $\mathbb{R}$ ולכן אינטגרבילית בכל $\mathbb{R}$. בנוסף

$$f(t) = e^{-t^2} > 0 \text{ בכל } \mathbb{R} \text{ ולכן לפי משפט } F(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt > 0$$

פתרון סעיף ב'

פונקציה אלמנטרית רציפה בכל $\mathbb{R}$, $u(x) = x$ ו- $v(x) = x + 1$ פונקציות גזירות

בכל $\mathbb{R}$ כפולינומים. לכן לפי כלל לייבניץ מתקיים:

$$F'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2}$$

לפי פרמה, F' מתאפסת בנקודות קיצון מקומיות:

$$F'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2} = 0$$

$$e^{-x^2-2x-1} - e^{-x^2} = e^{-x^2} (e^{-2x-1} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-2x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-2x} e^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow e^{-2x} = e^1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

כלומר $x = -\frac{1}{2}$ חשודה לקיצון. נעזר במבחן הנגזרת הראשונה:

x	$x < -\frac{1}{2}$ $x = -1$	$x = -\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$ $x = 0$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$F'(-1) = e^{-1} \underbrace{(e^1 - 1)}_{>0} > 0, \quad F'(0) = e^0 \underbrace{(e^{-1} - 1)}_{<0} < 0$$

תחומי עלייה: $F'(x) > 0$ לכל $x < -\frac{1}{2}$ ולכן לפי מסקנות לגרנד' F מונוטונית עולה ממש שם.

תחומי ירידה: $F'(x) < 0$ לכל $x > -\frac{1}{2}$ ולכן לפי מסקנות לגרנד' F מונוטונית יורדת ממש שם.

מכאן לפי מבחן הנגזרת הראשונה $x = -\frac{1}{2}$ נקודת מקסימום מקומית.

דרך חלופית להראות נקודת קיצון מקומית – מבחן הנגזרת השנייה

$F'(x)$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ כהפרש של פונקציות מעריכיות גזירות בכל $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F''(x) &= -e^{-(x+1)^2} 2(x+1) + e^{-x^2} (2x) = \\ &= 2xe^{-x^2} - 2(x+1)e^{-(x+1)^2} \end{aligned}$$

נציב את $x = -\frac{1}{2}$ ונעזר במבחן הנגזרת השנייה לאיפיון נקודות קיצון מקומיות:

$$\begin{aligned} F''\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{4}} - 2\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{4}} = \\ &= -e^{\frac{1}{4}} - e^{\frac{1}{4}} = -2e^{\frac{1}{4}} < 0 \end{aligned}$$

לכן זוהי נקודת מקסימום מקומית.

פתרון סעיף ג'

תזכורת – משפט

תהי $f(x)$ אינטגרלית ב- $[a, b]$ ונסמן: $M = \sup_{[a, b]} f(x)$, $m = \inf_{[a, b]} f(x)$ אז:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$f(t) = e^{-t^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ לכן f אינטגרלית שם. כמו-כן e^{-x^2} פונקציה מונוטונית יורדת ממש לכל $x > 0$ ולכן בקטע $[x, x+1]$ לפי משפט:

$$e^{-(x+1)^2} (x+1-x) \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} (x+1-x)$$

$$0 \leq e^{-(x+1)^2} \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}, \quad \forall x > 0$$

$$\begin{matrix} 0 & \leq & F(x) & \leq & e^{-x^2} \\ \rightarrow 0 & & & & \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \text{וכאשר } x \rightarrow \infty$$

ולכן לפי משפט הסנדביץ': $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$.

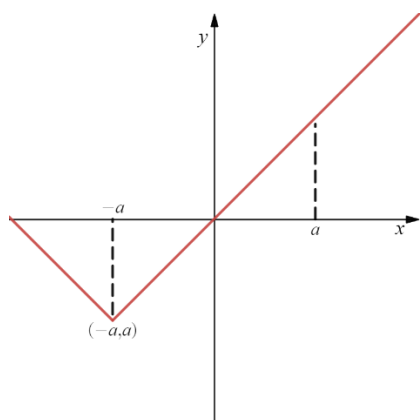
שאלה מספר 7 – תכונות האינטגרל

נכון / לא נכון: אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה המקיימת $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ לכל a , אזי $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$

פתרון

הטענה לא נכונה, להלן דוגמא נגדית:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x > -a \\ -x - 2a & , x \leq -a \end{cases}$$



אז מכיוון שלכל $-a < x < a$ הפונקציה שווה ל- x , שזו פונקציה אי-זוגית בקטע סימטרי, האינטגרל שלה יתאפס בקטע זה. אבל מחוץ לקטע זה על כל הישר הממשי האינטגרל כבר לא יתאפס (מכיוון שהסימטריה האי-זוגית נשברת).

אינטגרלים מוכללים

שאלה מספר 8 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2-x}} dx \quad (\text{ב})$$

תזכורות

$$\int_0^{b>0} \frac{dx}{x^p} \quad \text{האינטגרל מתכנס עבור } p < 1 \text{ ומתבדר עבור } p \geq 1.$$

$$\int_{a>0}^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \text{האינטגרל מתכנס עבור } p > 1 \text{ ומתבדר עבור } p \leq 1.$$

שלבי עבודה עם אינטגרלים מוכללים

(1) זיהוי הנקודות הסינגולריות (נקודות בהן האינטגרנד מתפוצץ. ∞ תמיד "נקודה" סינגולרית).

(2) אם ניתן, נביא את האינטגרל לאינטגרל ידוע $\int \frac{1}{x^p} dx$ (על-ידי הצבה למשל) וסיימנו.

אחרת, נזהה איך הפונקציה מתנהגת בסביבת הנקודה הסינגולרית (זיהוי האיבר

הדומיננטי בסביבת הנקודה, שימוש בטור טיילור, שימוש באי-שוויונות מוכרים). הפונקציה שנקבל היא זאת שאיתה נרצה להשוות את הפונקציה באינטגרנד.

(3) אם שתי הפונקציות חיוביות (הפונקציה באינטגרנד והפונקציה שאנחנו רוצים להשוות איתה), נשתמש באחד ממבחני השוואה.

אחרת, נבדוק האם האינטגרל מתכנס בהחלט (כאשר התכנסות מוחלטת גוררת התכנסות).

אחרת (כלומר, אם גם זה כשל), ננסה ממש לפתור את האינטגרל (על-ידי אינטגרציה בחלקים למשל ובדיקת התכנסות/התבדרות של כל חלק בנפרד).

פתרון סעיף א'

ישנה נקודה סינגולרית ב- $x = 1$.

ננסה להביא את האינטגרל המוכלל הנתון לאינטגרל מוכלל ידוע מהצורה של $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

נשתמש בהצבה $t = 1 - x$

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ dt = -dx \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ הוא אינטגרל מתכנס ($p = \frac{1}{2} < 1$)

פתרון סעיף ב'

ישנה נקודה סינגולרית ב- $x = 0$.

נשים-לב שבסביבת הנקודה $x = 0$ הפונקציה מתנהגת כמו: $\frac{1}{x\sqrt{2-x}} \sim \frac{1}{x\sqrt{2}} \sim \frac{1}{x}$

(כלומר כאשר $x \rightarrow 0$ האיבר הדומיננטי הוא $\frac{1}{x}$).

מכיוון ששתי הפונקציות חיוביות ב- $[0, 1]$, נעזר במבחן השוואה השני:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x\sqrt{2-x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

מכיוון ש- $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$ והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ מתבדר, נובע שגם האינטגרל הנתון מתבדר.

שאלה מספר 9 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות האינטגרל: $\int_0^1 \frac{1}{e^x - x - 1} dx$

פתרון

ישנה נקודה סינגולרית ב- $x = 0$.

ננסה להבין איך הפונקציה מתנהגת בסביבת הנקודה $x = 0$.

נעזר בפיתוח טור-טיילור של e^x בסביבת הנקודה $x = 0$, במילים אחרות, נשתמש בטור מקלורן שלה:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

כעת אם נעביר אגף:

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \dots$$

זאת אומרת שמכאן ניתן להסיק כי בסביבת הנקודה $x = 0$ הפונקציה מתנהגת כמו:

$$\frac{1}{e^x - x - 1} \sim \frac{1}{\frac{x^2}{2!}} \sim \frac{1}{x^2}$$

מכיוון ששתי הפונקציות חיוביות ב- $[0, 1]$, נעזר במבחן ההשוואה השני:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^x - x - 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} \stackrel{\sim \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} \stackrel{\sim \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 2$$

מכיוון ש- $0 < 2 < \infty$ והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ מתבדר, נובע שגם האינטגרל הנתון מתבדר.

שאלה מספר 10 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות האינטגרל: $\int_1^{\infty} \frac{1}{[x]+1} dx$

פתרון

הסינגולריות היא ב- ∞ .

כאשר $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{[x]+1} \sim \frac{1}{x+1}$, לכן מבחינה אינטואיטיבית כנראה שהאינטגרל הנתון מתבדר.

כדי להראות זאת, נעזר באי-שוויון מוכר:

$$\begin{aligned} x-1 &< [x] \leq x \quad / +1 \\ (*) \quad x &< [x]+1 \leq x+1 \end{aligned}$$

מכאן:

$$\frac{1}{[x]+1} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{x+1} \stackrel{x \geq 1}{\geq} \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2x}$$

מכיוון ששתי הפונקציות חיוביות ב- $[1, \infty)$, והאינטגרל $\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ מתבדר, לכן לפי מבחן ההשוואה

הראשון גם האינטגרל הנתון מתבדר.

לחלופין אפשר לסיים כבר ב- $\frac{1}{[x]+1} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{x+1}$ ולהראות כי האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$ מתבדר (על-ידי

הצבה פשוטה $t = x+1$ והבאה לידי אינטגרל מוכר).

שאלה מספר 11 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות האינטגרל: $\int_0^{\infty} (\ln(1+e^x) - x) dx$

פתרון

הסינגולריות היא ב- ∞ .

$$\text{כאשר } x \rightarrow \infty: \ln(1+e^x) - x \sim \ln e^x - x = x \ln e - x = x - x = 0$$

זאת-אומרת שבהתקרבות לאינסוף, הפונקציה באינטגרנד שואפת ל-0, אבל זה עדיין לא מעיד בוודאות כי האינטגרל מתכנס. נעזר בחשבון לוגריתמים:

$$\ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$$

וכאשר $x \rightarrow \infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, לכן נעזר בפיתוח טור טיילור של $\ln(1+x)$ בסביבת הנקודה $x=0$ (כלומר טור מקלורן שלה):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

כלומר עבור x -ים מאוד קטנים ($x \sim 0$) נקבל כי $\ln(1+x) \sim x$.

$$\ln(1+e^{-x}) \sim e^{-x} \quad \text{מכאן נסיק כי:}$$

מכיוון ששתי הפונקציות חיוביות ב- $[0, \infty)$, נעזר במבחן ההשוואה השני ונחשב את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \stackrel{0}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני שני האינטגרלים מתכנסים או מתבדרים ביחד, אבל האינטגרל הבא

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left. \frac{e^{-x}}{-1} \right|_0^{\infty} = e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 - 0 = 1 \quad \text{מתכנס:}$$

לכן גם האינטגרל הנתון מתכנס.

שאלה מספר 12 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (\text{ב})$$

פתרון סעיף א'

$$f = \frac{\arctan x}{x^2} \stackrel{\arctan x \leq \frac{\pi}{2}}{\leq} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = g \quad \text{נשים לב כי מתקיים:}$$

$$f, g \text{ שתי פונקציות חיוביות בתחום האינטגרציה, האינטגרל } \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס לכן לפי מבחן}$$

ההשוואה הראשון גם האינטגרל הנתון מתכנס.

פתרון סעיף ב'

$$\frac{\sin x}{x^2} \text{ לא חיובית לכל } x \geq 1, \text{ לכן לא ניתן להשתמש במבחני ההשוואה ולכן נבחן את ההתכנסות}$$

$$f = \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \stackrel{|\sin x| \leq 1}{\leq} \frac{1}{x^2} = g \quad \text{המוחלט שלה:}$$

$$f, g \text{ שתי פונקציות חיוביות בתחום האינטגרציה, האינטגרל } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס לכן לפי מבחן}$$

ההשוואה הראשון גם אינטגרל הערך המוחלט מתכנס ולכן גם האינטגרל המקורי מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס).

מסקנה חשובה

$$\int_{a>0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad \text{האינטגרל}$$

מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס) עבור $p > 1$, מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, ומתבדר עבור $p \leq 0$.

שאלה מספר 13 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרל הבא: $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

פתרון

מחליפה סימן באופן מחזורי ולכן לא ניתן להשתמש במבחני ההשוואה. נפתור את האינטגרל לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \underbrace{\frac{1}{x} \sin x \Big|_1^{\infty}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx}_{(2)}$$

$$\left. \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & v' = \cos x \\ u' = -\frac{1}{x^2} & v = \sin x \end{array} \right|$$

כאשר האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ מתכנס אם (1) ו- (2) מתכנסים.

ביטוי (1) מתכנס כי:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \sin x \Big|_1^b \right) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b \text{ bounded} \\ \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{b} \sin b - \sin 1 \right) = -\sin 1$$

אינטגרל (2) מתכנס כי $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ והאינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס, לכן לפי מבחן ההשוואה

הראשון גם $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ מתכנס ולכן $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

לכן גם $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ מתכנס.

שאלה מספר 14 – התכנסות מוחלטת או בתנאי

בדוק האם האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

פתרון

מחליפה סימן באופן מחזורי ולכן לא ניתן להשתמש במבחני ההשוואה. נחשב את האינטגרל לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{-\frac{1}{x} \cos x \Big|_1^{\infty}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{(2)}$$

$$\left. \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & v' = \sin x \\ u' = -\frac{1}{x^2} & v = -\cos x \end{array} \right|$$

כאשר האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס אם (1) ו- (2) מתכנסים.

ביטוי (1) מתכנס כי:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \cos x \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cos x \Big|_b^1 \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\cos 1 - \frac{1}{b} \cos b \right) = \cos 1$$

$\begin{matrix} \text{bounded} \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$

אינטגרל (2) מתכנס כי $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ והאינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס, לכן לפי מבחן ההשוואה

הראשון גם $\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ מתכנס ולכן $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

לכן בסך הכל $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס.

נבחן את ההתכנסות המוחלטת או בתנאי

בהרצאה ראינו את אי-השוויון הבא: $|\sin x| \geq \sin^2 x$ (אי-שוויון חשוב, ראה גרף בסוף השאלה),

נשתמש בא"ש זה כדי להוכיח שהאינטגרל $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ מתבדר:

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1 - \cos(2x)}{2x} dx = \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx}_{(1)} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{2x} dx}_{(2)}$$

נראה כי אינטגרל (1) מתבדר ל- ∞ ואינטגרל (2) מתכנס למספר סופי ולכן האינטגרל כולו מתבדר.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty \quad \text{אינטגרל (1) מתבדר כי:}$$

אינטגרל (2) מתכנס (הראנו בשאלה הקודמת בסעיף ב').

לכן בסך הכל האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ מתבדר ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם האינטגרל

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \text{ מתבדר.}$$

לסיכום

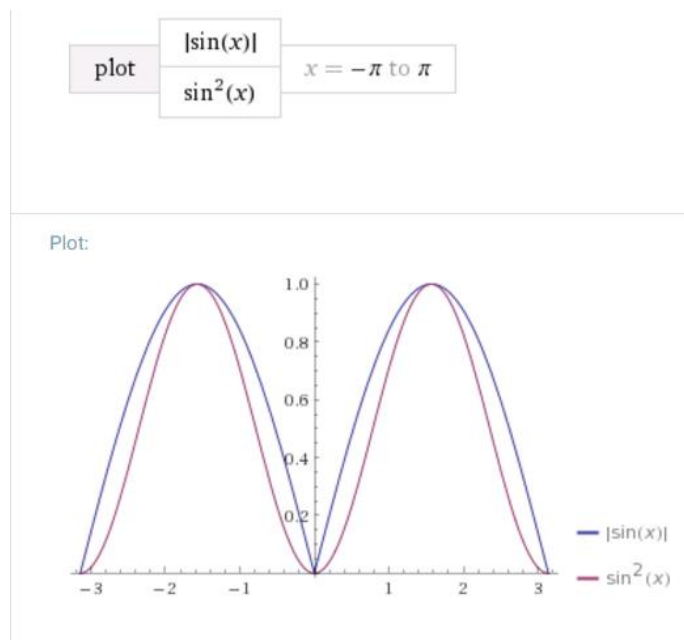
ראינו כי:

$$(1) \int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \text{ מתבדר.}$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ מתכנס.}$$

$$\text{מסקנה} \leftarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ מתכנס בתנאי.}$$

גרף של אי-השוויון: $|\sin x| \geq \sin^2 x$



לגזור ולשמור

מסקנה חשובה

$$\int_{a>0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad \text{האינטגרל}$$

מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס) עבור $p > 1$,

מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$

ומתבדר עבור $p \leq 0$.

אי-שוויונות חשובים שראינו על סינוס

לכל x מתקיים:

- 1) $|\sin x| \leq 1$
- 2) $|\sin x| \leq |x|$
- 3) $|\sin x| \geq \sin^2 x$

שאלה מספר 15 – התכנסות מוחלטת או בתנאי

לפניך 3 אינטגרלים מוכללים: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

איזה טענה מהטענות הבאות נכונה:

- (א) שניים מתכנסים בהחלט ואחד בתנאי.
- (ב) אחד מתכנס בהחלט, אחד בתנאי ואחד מתבדר.
- (ג) שניים מתכנסים בתנאי ואחד מתבדר.
- (ד) שניים מתבדרים ואחד מתכנס בהחלט.
- (ה) שניים מתכנסים בהחלט ואחד מתבדר.

פתרון

האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס בתנאי (לפי המסקנה החשובה, וגם ראינו בתרגיל הקודם).

האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ מתבדר (ראינו בתרגיל הקודם).

האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט (לפי המסקנה החשובה), נראה זאת:

$\frac{\sin x}{x^2}$ לא חיובית לכל $x \geq 1$, לכן נבחן את ההתכנסות המוחלטת שלה:

$$f = \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \stackrel{|\sin x| \leq 1}{\leq} \frac{1}{x^2} = g$$

f, g שתי פונקציות חיוביות בתחום האינטגרציה, האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס לכן לפי מבחן

ההשוואה הראשון גם האינטגרל הנתון מתכנס.

לכן בסך הכל אינטגרל אחד מתכנס בתנאי, אחד מתבדר ואחד מתכנס בהחלט, כלומר התשובה הנכונה היא תשובה ב'.

שאלה מספר 16 – אינטגרלים מוכללים

$$II = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\tan(x^2)} dx \quad I = \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx \quad \text{האינטגרלים המוכללים:}$$

- א. מתכנסים.
 ב. לא מתכנסים.
 ג. I מתכנס ו-II לא מתכנס.
 ד. I לא מתכנס ו-II מתכנס.

תזכורת – טורי מקלורן נפוצים

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & D &= (-\infty, \infty) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & D &= (-\infty, \infty) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, & D &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, & D &= [-1, 1] \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, & D &= (-1, 1] \end{aligned}$$

אינטגרל I

האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$ מתכנס. נראה זאת:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

אינטואיציה:

$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ חיובית לכל $x \geq 1$ לכן נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

מכיוון ש- $0 < 1 < \infty$ והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס ($p = 2 > 1$) אזי גם האינטגרל הנתון מתכנס.

אינטגרל II

$$\frac{\ln(1+x)}{\tan(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

אינטואיציה:

$\frac{\ln(1+x)}{\tan(x^2)}$ חיובית לכל $0 < x \leq 1$ לכן נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{\tan(x^2)}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan(x^2)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

מכיוון ש- $0 < 1 < \infty$ והאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ מתבדר אזי גם האינטגרל הנתון מתבדר. לכן התשובה היא

(ג) – I מתכנס ו-II לא מתכנס.

שאלה מספר 17 – אינטגרלים מוכללים ומבחני השוואה

קבע האם האינטגרל הבא מתכנס או מתבדר: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln x} dx$

פתרון

האינטואיציה שתוביל אותנו בפתרון השאלה הזאת מתבססת על אי-השוויון: $\ln x \leq x-1$, לכל x .

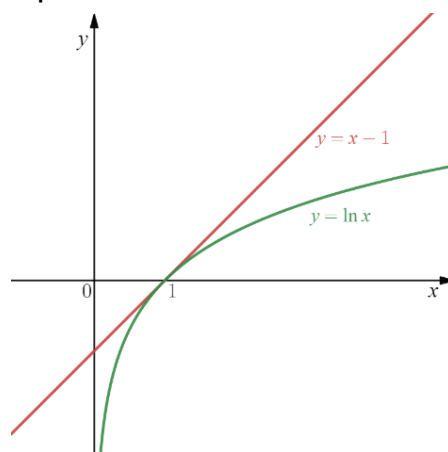
אפשר להגיע לכך למשל מטור טיילור-מקלורן הידוע:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

$$\Rightarrow \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots$$

כלומר עבור x ימים מאוד קרובים ל-1 מתקיים בקירוב:

$$\ln x \approx x-1$$



כלומר בסביבת הנקודה הסינגולרית $x=1$ שני האינטגרלים מתנהגים באופן דומה, ומכיון שהאינטגרל השני מתבדר, גם האינטגרל הנתון מתבדר:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln x} dx \approx \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\infty$$

ולכן גם הטור הנתון מתבדר.

הוכחה פורמלית

לא ניתן להשתמש כאן במבחני ההשוואה מכיוון שמדובר באינטגרלים שליליים בתחום הנתון. נשים לב

כי אם נשים סימן מינוס לפני הפונקציה אזי האינטגרלים הבאים הינם חיוביים בתחום:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{\ln x} \right) dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{x-1} \right) dx$$

במילים אחרות הפונקציות $-\frac{1}{\ln x}$ ו- $-\frac{1}{x-1}$ הינן חיוביות בתחום $\frac{1}{2} < x < 1$ ולכן כעת ניתן להשתמש

במבחני ההשוואה הרגילים. אזי נבחן את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{-\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

קיבלנו מספר סופי וחיובי, כמו-כן האינטגרל הבא מתבדר:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{x-1} \right) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x-1| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -(-\infty) = \infty$$

ולכן לפי משפט ההשוואה השני גם האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{\ln x} \right) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln x} dx$ מתבדר ולכן גם

האינטגרל הנתון $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln x} dx$ מתבדר.

טורים – מבחני השוואה

שאלה מספר 18 – מבחני השוואה

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

פתרון

תזכורת

מבחן השורש (קושי)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ונניח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

(1) אם $L < 1$ אזי הטור מתכנס.

(2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר.

תוספת למשפט

כאשר $L = 1$ המבחן כושל – אין מספיק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

תזכורת

לכל פולינום מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$

כאשר פולינום הוא כל דבר מהצורה: $P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$

דוגמא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^5 + 9n^2 + 2n + 17} = 1$$

לכן בפרט גם מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{e^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{e}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow e > 1$$

נחזור לתרגיל, הטור חיובי, נעזר במבחן השורש: $e > 1$

לכן הטור מתבדר.

שאלה מספר 19 – מבחני השוואה

יהא מספר ממשי וחיובי $c > 0$ כלשהו.

עבור אילו ערכי c הטור הבא מתכנס או מתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!c^n}{n^n}$

רמז: העזר בגבול סטרלינג $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

פתרון

תזכורת

מבחן המנה (דלמבר)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ונניח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L$

(1) אם $L < 1$ אזי הטור מתכנס.

(2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר.

תוספת למשפט

כאשר $L = 1$ המבחן כושל – אין מספיק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

נחזור לתרגיל, הטור חיובי, נעזר במבחן המנה:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{c^{n+1} n^n}{n!}}{\frac{c^n (n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{c^{n+1} (n+1)!}{n! c^n (n+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{(n+1)! c^{n+1}}{n! c^n (n+1)^n (n+1)} = \frac{\cancel{n!} (n+1) \cancel{c} c}{\cancel{n!} \cancel{c} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cancel{(n+1)}} \rightarrow ce^{-1} = \frac{c}{e} \end{aligned}$$

עבור $c > e$ נקבל כי הגבול גדול מ-1 ולכן לפי מבחן המנה מתבדר.

עבור $c < e$ נקבל כי הגבול קטן מ-1 ולכן לפי מבחן המנה מתכנס.

עבור $c = e$ נקבל בדיוק 1 ואז מבחן המנה כשל. הטור מתבדר, נראה זאת על-ידי קירוב סטרלינג:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

כלומר הטור מתנהג כמו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! c^n}{n^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} c^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$$

זהו טור חיובי ומתבדר (איבר כללי לא שואף לאפס), נשווה עם הטור הנתון לפי מבחן ההשוואה השני ונעזר בגבול סטרלינג:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

קיבלנו מספר סופי וחיובי, ולכן גם הטור הנתון מתבדר.

שאלה מספר 20 – מבחני השוואה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n^3 + 8n + \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}} \quad \text{בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:}$$

פתרון - דרך ראשונה – מבחן ההשוואה הראשון

אינטואיציה לסדרה שמסתתרת בתוך הסדרה הנתונה:

$$\sqrt[5]{\frac{n^3 + 8n + \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}} \sim \sqrt[5]{\frac{n^3}{n^8}} = \sqrt[5]{\frac{1}{n^5}} = \frac{1}{n}$$

תזכורת

מבחן ההשוואה הראשון

נתונים שני טורים חיוביים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ונתון כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n \leq b_n$, אזי:

(1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

$$\sqrt[5]{\frac{n^3 + 8n + \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}} \geq \sqrt[5]{\frac{n^3}{n^8 + 3n^8 + n^8}} = \sqrt[5]{\frac{n^3}{5n^8}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5n^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5} n}$$

הטור הנתון וגם הטור ההרמוני שניהם חיוביים לכל n . הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר ולכן לפי

מבחן ההשוואה הראשון גם הטור הנתון מתבדר.

דרך שנייה – מבחן ההשוואה השניתזכורתמבחן ההשוואה השני

נתונים שני טורים חיוביים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 אם: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = L$ כאשר $L > 0$ סופי וחיובי,
 אזי שני הטורים מתכנסים או מתבדרים ביחד.

תוספת למשפט

אם $L = 0$ אזי מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

אם $L = \infty$ אזי מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

הטור הנתון וגם הטור ההרמוני שניהם חיוביים לכל n ולכן נעזר במבחן ההשוואה השני:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{\frac{n^3 + 8n + \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{\frac{n^3 + 8n + \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{n^5}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{n^8 + 8n^6 + n^5 \cos^2(n)}{n^8 + 3n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{1 + \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3} \cos^2(n)}{1 + \frac{3}{n^6} + \frac{1}{n^8}}} = \sqrt[5]{1} = 1 \end{aligned}$$

ומכיוון ש- $0 < 1 < \infty$ והטור ההרמוני הידוע מתבדר, גם הטור הנתון מתבדר.

שאלה מספר 21 – מבחני השוואה

בדוק את התכנסות/התבדרות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad (\text{ג})$$

פתרון סעיף א'

תזכורת – משפט התכנסות/התבדרות טור הרמוני מוכלל

טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $0 < p \leq 1$.

לכן בפרט הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

נחזור לתרגיל, נעזר במבחן ההשוואה השני ונשווה עם הטור ההרמוני המתבדר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

שני הטורים חיוביים, קיבלנו מספר חיובי וסופי לכן לפי מבחן ההשוואה השני גם הטור הנתון מתבדר.

פתרון סעיף ב'

מהגבול המפורסם אנחנו יודעים ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. כמסקנה אנחנו יודעים גם שמתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

(למשל על-ידי הפעלת כלל לופיטל פעם אחת).

ומכאן נובע שמתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

ומכיוון ששני הטורים חיוביים, קיבלנו מספר חיובי וסופי והטורי ההרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, גם הטור הנתון מתבדר.

פתרון סעיף ג'

נשווה את הטור החיובי הנתון עם הטור החיובי המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = 1$$

קיבלנו מספר חיובי וסופי ולכן לפי מבחן השוואה השני גם הטור הנתון מתכנס.

שאלה מספר 22 – מבחני השוואה

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi)$

פתרון

תזכורת

מבחן לייבניץ

אם הטור המתחלף מקיים את התנאים הבאים:

(1) הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

אזי הטור מתכנס.

הערה

מספיק שהסדרה תרד החל מ- $n \geq N$ מסוים.

נחזור לתרגיל:

ניזכר: $\begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \cos(\pi) = -1 \end{cases}$ וכך הלאה באופן מחזורי. לכן באופן כללי: $\cos(n\pi) = (-1)^n$

מכאן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

זהו טור לייבניץ!

זהו טור מחליף סימן ו- $a_n = \frac{1}{n}$ הינה סדרה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

לכן לפי מבחן לייבניץ, הטור מתכנס.

שאלה מספר 23 – טורי $\ln$ -ים

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{1.5}}$ מתכנס לכל k .

ניתן להיעזר בעובדה כי לכל $\alpha > 0$, $\ln n < n^\alpha$, החל ממקום מסוים.

פתרון

מקרה $k > 0$:

לפי הרמז לכל $\alpha > 0$, $\ln n < n^\alpha$, החל ממקום מסוים, לכן אם נבחר $\alpha = \frac{0.1}{k} > 0$ עבור $k > 0$

כלשהו, אזי נקבל כי מתקיים: $(\ln n)^k < n^{0.1} \Rightarrow \ln n < n^{\frac{0.1}{k}} \Rightarrow (\ln n)^k < n^{0.1}$ החל ממקום מסוים ומכאן:

$$a_n = \frac{(\ln n)^k}{n^{1.5}} \leq \frac{n^{0.1}}{n^{1.5}} = \frac{1}{n^{1.4}} = b_n$$

שני הטורים $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ חיוביים, הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1.4}}$ הינו טור הרמוני מוכלל מתכנס ($p > 1$) ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור הנתון מתכנס.

מקרה $k \leq 0$:

נסמן $k = -q$ ואז לכל $q \geq 0$ הטור המתקבל: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{1.5}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{-q}}{n^{1.5}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5} (\ln n)^q}$

נעזר בעובדה כי לכל $n \geq 3$: $\ln n > 1$

$$a_n = \frac{1}{n^{1.5} (\ln n)^q} \leq \frac{1}{n^{1.5} \cdot 1^q} = \frac{1}{n^{1.5}} = b_n \quad \text{ומכאן:}$$

שני הטורים $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ חיוביים, הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ הינו טור הרמוני מוכלל מתכנס ($p > 1$) ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור הנתון מתכנס.

שאלה מספר 24 – הוכח/הפוך

הוכח/הפוך את הטענה הבאה:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי, לפי מבחן ההשוואה השני עם הטור ההרמוני המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, שני הטורים

מתבדרים ביחד, לכן הטענה נכונה.

שאלה מספר 25 – תנאי הכרחי להתכנסות הטור

(א) נסח את התנאי ההכרחי להתכנסות הטור.

(ב) הוכח/הפוך את הטענות הבאות:

(1) אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ מתכנס.

(2) אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n}$ מתכנס.

פתרון סעיף א'

תנאי הכרחי להתכנסות הטור

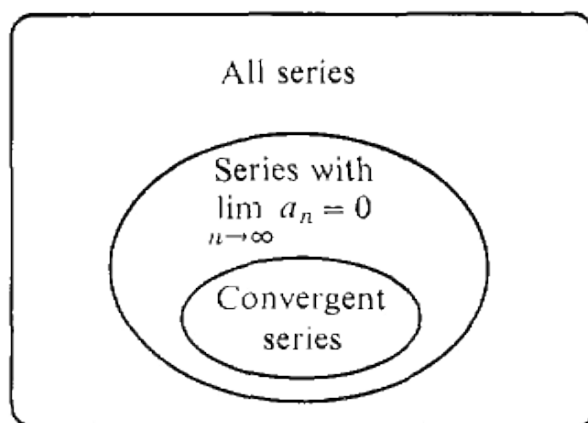
נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם הטור מתכנס אזי: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

הערות

(1) זוהי דרך מעולה לפסול התכנסות של טור. כלומר אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ אזי הטור לא מתכנס!

(2) זהו תנאי הכרחי אך לא מספיק! כלומר אם קיבלנו $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ - לא יודעים בוודאות דבר על

התכנסות הטור, צריך לבדוק.



פתרון סעיף ב'**(1) הטענה לא נכונה.**

נתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, לכן מקיים את תנאי הכרחי להתכנסות הטור: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

מכאן תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ לא מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(a_n) = 1$

לכן הטור מתבדר.

(2) הטענה לא נכונה.

בדומה תנאי הכרחי להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n}$ לא מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$

לכן הטור מתבדר.

שאלה מספר 26 – הוכח/הפוך

הוכח/הפוך את הטענה הבאה:

(א) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ מתכנס.

פתרון סעיף א'

הטענה לא נכונה, נביא דוגמא נגדית:

נבחר סדרה: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ הינו טור לייבניץ מתכנס.

לעומת זאת הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הינו טור הרמוני מתבדר.

$$(-1)^n (-1)^n = (-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1 \quad * \text{ כאשר:}$$

לכן הטענה לא נכונה.

פתרון סעיף ב'

הטענה לא נכונה, נביא דוגמא נגדית:

נתבונן באיבר הכללי: $a_n = \frac{1}{n^2}$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ הינו טור הרמוני מוכלל מתכנס. לעומת

זאת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הינו טור הרמוני מתבדר.

לכן הטענה לא נכונה.

שאלה מספר 27 – הוכח/הפוך

הוכח/הפוך את הטענה הבאה:

(א) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(ב)  אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

פתרון סעיף א'

הטענה לא נכונה, ניתן דוגמא נגדית:

נתבונן באיבר הכללי: $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ הינו טור לייבניץ

מתכנס. לעומת זאת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הינו טור הרמוני מתבדר.

לכן הטענה לא נכונה.

פתרון סעיף ב'

הטענה נכונה.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס לכן לפי תנאי הכרחי להתכנסות a_n שואף ל-0. לכן עבור n מספיק גדול

מתקיים: $a_n^2 < a_n$. הסבר: שואף ל-0, לכן החל מ- n מסוים הוא יהיה קטן מ-1, כלומר שבר

בין 0 ל-1. כאשר מעלים בריבוע שבר הוא ניהיה קטן יותר: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, לכן כאשר נעלה את a_n

בריבוע הוא יקטן: $a_n^2 < a_n$. ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

לכן הטענה נכונה.

שאלה מספר 28 – הוכח/הפרר

אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - \cos^2(a_n)]$ מתכנס.

פתרון

הטענה נכונה.

נשים לב שהפעם תנאי הכרחי להתכנסות הטור מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \cos^2(a_n)) = 0$

כמו כן מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos^2(a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(a_n)$

כאשר נעזרנו בזוהי: $\sin^2(a_n) + \cos^2(a_n) = 1$

נעזר במבחן ההשוואה השני עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(a_n)}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(a_n)}{a_n} \right)^2 = 1$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס כפי שהוכחנו בשאלה הקודמת, לכן לפי מבחן ההשוואה השני גם הטור הנתון

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos^2(a_n)) \text{ מתכנס.}$$

שאלה מספר 29 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2 + 1}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{1}{n}\right), \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

נתונים הטורים:

אזי:

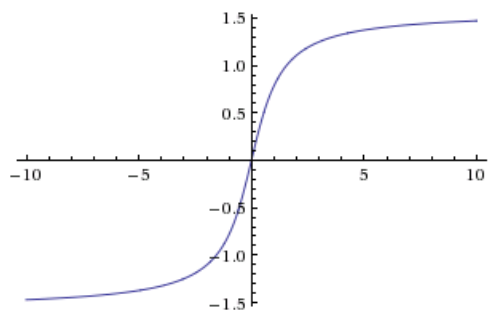
- הטור A מתכנס בהחלט והטורים B ו-C מתכנסים בתנאי.
- הטורים A ו-C מתכנסים בהחלט וטור B מתבדר.
- הטור A מתכנס בהחלט והטורים B ו-C מתבדרים.
- הטור A מתכנס בהחלט, הטור B מתבדר והטור C מתכנס בתנאי.
- אף אחד מן הטורים איננו מתכנס בהחלט.

פתרון

טור A

plot $\tan^{-1}(x)$ $x = -10$ to 10

Plot:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\arctg(n)}{n^2 + 1} \right|$$

נתבונן בטור הערכים המוחלטים:

פונקציית ה- $\arctg(n)$ חסומה ע"י $\frac{\pi}{2}$:

$$|\arctg(n)| < \frac{\pi}{2}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון:

$$\left| \frac{\arctg(n)}{n^2 + 1} \right| < \frac{\pi/2}{n^2 + 1} < \frac{\pi/2}{n^2}$$

הטור $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

טור B

תזכורת

3 מסקנות מהגבול המפורסם: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad (3)$$

נחזור לתרגיל, מתוך מסקנה מספר (3) וממבחן ההשוואה השני עם טור הרמוני מתבדר מקבלים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

קיבלנו מספר חיובי וסופי לכן לפי מבחן ההשוואה השני גם הטור הנתון מתבדר.

טור C

פונקציית ה- $\arctg(n)$ היא אי-זוגית ולכן: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctg\left(\frac{1}{n}\right)$

הסדרה $\arctg\left(\frac{1}{n}\right)$ הינה מונוטונית יורדת לאפס ולכן הטור מתכנס כטור לייבניץ.

לעומת זאת ראינו כי הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \arctg\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{1}{n}\right)$ הינו טור מתבדר ולכן הטור

המקורי מתכנס בתנאי.

לכן התשובה הנכונה היא תשובה ד'.

שאלה מספר 30 – טור טלסקופי

בדוק את התכנסות/התבדרות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, חשב את סכומו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \quad (\text{א}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+4)} \quad (\text{ב})$$

פתרון סעיף א'

נסדר את סדרת הסכום מעט שונה, כך שההפרש בין המכנים יעמוד על 1 ולא על 2.

$$a_n = \frac{2}{n(n+2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right] = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right] = \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

ניקח את הסכום החלקי:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_{a_1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ניקח את $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ לשיחה אישית בצד:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

באופן דומה למחובר השני:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

נחזור לחישוב הסכום החלקי:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

לחישוב הסכום האינסופי, נשאיף את $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}}$$

כלומר סך הכל קיבלנו:

פתרון סעיף ב'

נתבונן בסכום החלקי של n האיברים הראשונים:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+2)(k+4)} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{2}{k(k+2)} - \underbrace{\frac{2}{1(1+2)}}_{k=1} - \underbrace{\frac{2}{2(2+2)}}_{k=2} =$$

נשים לב שבהשאפת $n \rightarrow \infty$ מקבלים את הסכום מסעיף א', אותו כבר חישבנו:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n+2} \frac{2}{k(k+2)} - \frac{2}{1(1+2)} - \frac{2}{2(2+2)} \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)}}_{=\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{18-8-3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+4)} = \frac{7}{12}}$$

לכן:

שאלה מספר 31 – טורים ומבחני השוואה

$$\text{הטורים: } I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(n + \cos(n))} \quad II = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n) \right)$$

- א. מתכנסים.
 ב. לא מתכנסים.
 ג. I מתכנס ו-II לא מתכנס.
 ד. I לא מתכנס ו-II מתכנס.

טור I

$$\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(n + \cos(n))} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n} \cdot n} \sim \frac{1}{n^{1.5}} \quad \text{אינטואיציה:}$$

נשווה את הטור עם הטור ההרמוני החיובי המתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ ($p = 1.5 > 1$). נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(n + \cos(n))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \cos(n)} \cdot \arctan(n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \underbrace{\left(\frac{\cos(n)}{n} \right)}_{\rightarrow 0}} \cdot \underbrace{\arctan(n)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$0 < \frac{\pi}{2} < \infty$ ולכן לפי מבחן ההשוואה השני שני גם הטור הנתון מתכנס.

טור II

אינטואיציה

נעזר בזהות שימושית: $\boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$ לכל $x > 0$ (ראה הוכחה למטה), מכאן:

$$\sqrt{n} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n) \right) = \sqrt{n} \cdot \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

נשווה את הטור עם הטור ההרמוני החיובי המתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p = 0.5 < 1$). נחשב את הגבול:

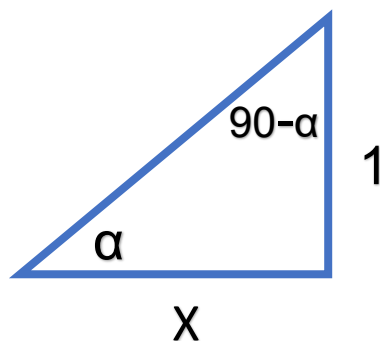
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n) \right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\frac{1}{n}} \stackrel{0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

$0 < 1 < \infty$ ולכן לפי מבחן ההשוואה השני שני גם הטור הנתון מתבדר.

לכן התשובה היא (ג) – I מתכנס ו-II לא מתכנס.

זהות שימושית

נתבונן במשולש ישר זווית פשוט עם זווית α וניצבים באורך 1 ו- $x > 0$ כלשהו.



נשים-לב כי מתקיים:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

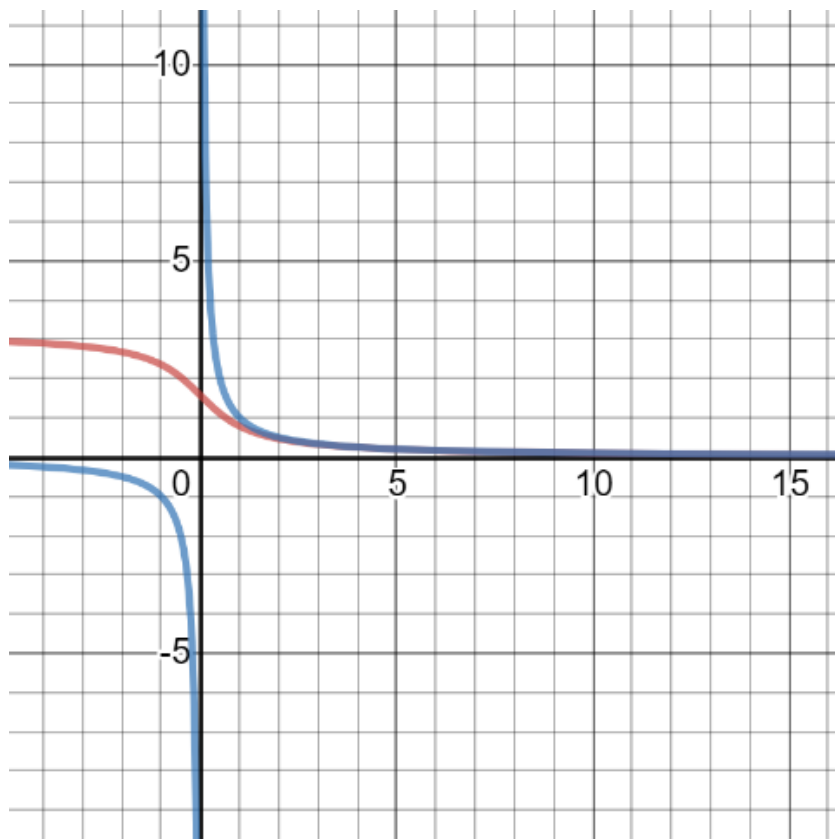
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan(x) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

מכאן ניתן להשוות את α ונקבל את הזהות:

$$\text{לכל } x > 0, \quad \boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

מסקנה: עבור x גדולים מאוד (כלומר $\frac{1}{x}$ קטן מאוד) מתקיים כי $\frac{\pi}{2} - \arctan x$ דועך כמו $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)^{x \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{x}$$



$\frac{\pi}{2} - \arctan x$ (באדום) דועך כמו $\frac{1}{x}$ (בכחול).

שאלה מספר 32 – טורי מספרים

$$\text{הטורים: } I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad II = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\ln n}$$

א. שני הטורים מתכנסים.

ב. שני הטורים מתבדרים.

ג. I מתכנס ו-II לא מתכנס.

ד. I לא מתכנס ו-II מתכנס.

טור I

אינטואיציה:

(1) נעזר בעובדה ש- $\ln(1+x) \sim x$ עבור x -ים מאוד מאוד קטנים וקרובים ל-0 (לפי טיילור-מקלורן של $\ln(1+x)$). מכאן מתקיים ש- $\ln\left(1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}$ עבור n -ים מאוד מאוד גדולים ($n \gg 1$).

(2) נעזר בעובדה ש- $\cos x \sim 1$ עבור x -ים מאוד מאוד קטנים וקרובים ל-0. מכאן מתקיים ש- $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$ עבור n -ים מאוד מאוד גדולים ($n \gg 1$).

(3) בנוסף, נשים לב כי $\arctan(1)$ הוא בסך הכל מספר: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ומכאן $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

מכאן:

$$a_n \triangleq \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \gg 1}{\sim} \frac{\frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\arctan 1} \underset{n \gg 1}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\pi}{4}} \sim \frac{1}{n} \triangleq b_n$$

והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הינו טור הרמוני **מתבדר**. זאת-אומרת שאנחנו כבר יודעים את התשובה, עכשיו רק נותר

לנסח את הפתרון. עד כאן האינטואיציה, כעת ננסח את דרך הפתרון הרשמית.

אם כך, נשווה את הטור הנתון עם הטור ההרמוני המתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)}{\frac{1}{n}}$$

ניקח את הסדרה $0 \neq x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, נגדיר את הפונקציה $f(x) = \frac{\left(\frac{\ln(1 + x \cos x)}{\arctan(1 + x)} \right)}{x}$ ונחשב את

הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\ln(1 + x \cos x)}{\arctan(1 + x)} \right)}{x} =$$

נכפול ונחלק ב- $\cos x$ ונסדר את הביטוי:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\ln(1 + x \cos x)}{x \cos x} \right)}_{(1)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos x}{\arctan(1 + x)} \right)}_{(2)}$$

שיחות אישיות בצד:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + x \cos x)}{x \cos x} \right) \stackrel{t=x \cos x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} \stackrel{\sim \frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + t} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\arctan(1 + x)} = \frac{1}{\arctan 1} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

נחזור לגבול, שני הגבולות קיימים וסופיים ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות – גבול המכפלה שווה למכפלת הגבולות ונקבל:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\ln(1 + x \cos x)}{x \cos x} \right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos x}{\arctan(1 + x)} \right)}_{\rightarrow \frac{4}{\pi}} = \frac{4}{\pi}$$

מכאן לפי היינה נוכל לחזור לגבול המקורי ולקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)}{\frac{1}{n}} = \frac{4}{\pi}$$

משום ש- $0 < \frac{4}{\pi} < \infty$ ושני הטורים חיוביים, הרי שלפי מבחן ההשוואה השני שני גם הטור הנתון

מתבדר.

טור II

אינטואיציה

(1) נעזר בזהות ש- $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ לכל $x > 0$ (ראה שאלה מספר 3 לעיל) ומכאן:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{לכל } n \text{ טבעי.}$$

(2) נעזר בעבודה ש- $\arctan x \sim 1$ עבור x ימים מאוד מאוד קטנים וקרובים ל-0. מכאן מתקיים ש- $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$ עבור n ימים מאוד מאוד גדולים ($n \gg 1$).

$$a_n \triangleq \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{\ln n} \stackrel{\frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{=} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \stackrel{n \gg 1}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n} = \frac{1}{n \ln n} \triangleq b_n$$

והטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ הינו טור **מתבדר** (ראו הקדמה לשאלה מספר 34 במרתון המצולם – טורי $\ln$ -ים ושאלה מספר 35).

במילים אחרות אנחנו כבר יודעים את התשובה, עכשיו רק נותר לנסח את הפתרון. עד כאן האינטואיציה, כעת ננסח את דרך הפתרון הרשמית.

אם כך, נשווה את הטור הנתון עם הטור ההרמוני המתבדר: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n) \right)}{\left(\frac{1}{n \ln n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

ניקח את הסדרה $0 \neq x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, נגדיר את הפונקציה $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ ונחשב את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

מכאן לפי היינה נוכל לחזור לגבול המקורי ולקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

משום ש- $0 < 1 < \infty$ ושני הטורים חיוביים, הרי שלפי מבחן ההשוואה השני שני גם הטור הנתון

מתבדר.

מכאן שהתשובה הנכונה היא ב' – שני הטורים מתבדרים.

שאלה מספר 34 – טורים ומבחני השוואה

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{נכון / לא נכון: הטור הבא מתכנס}$$

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח.

נגדיר פונקציה $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}$ לכל $x \geq 3$. זו פונקציה חיובית, רציפה ומונוטונית יורדת, לכן לפי

מבחן האינטגרל הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ והאינטגרל $\int_3^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

נתבונן באינטגרל:

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} dx \stackrel{t=\ln x \Rightarrow x=e^t}{=} \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{t^t} e^t dt = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{e^t}{t^t} dt$$

כעת נגדיר פונקציה $g(t) = \frac{e^t}{t^t}$ לכל $t \geq \ln 3$ ובפרט לכל $t \geq 3$ זו פונקציה חיובית, רציפה

ומונוטונית יורדת, לכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$ והאינטגרל $\int_3^{\infty} \frac{e^t}{t^t} dt$ מתכנסים או מתבדרים

ביחד. הטור חיובי ומתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = 0 < 1$$

ולכן לפי מבחן השורש הטור מתכנס, ולכן לפי מבחן האינטגרל, האינטגרל $\int_3^{\infty} \frac{e^t}{t^t} dt$ מתכנס (ובפרט גם

$$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{e^t}{t^t} dt \text{ (מתכנס) ולכן שוב לפי מבחן האינטגרל גם הטור } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \text{ מתכנס.}$$

מ.ש.ל

שאלה מספר 35 – טור ואינטגרל מוכלל

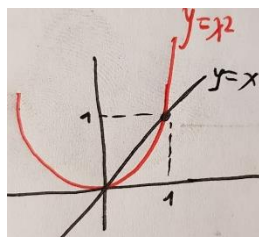
$$\text{הטור והאינטגרל המוכלל: } I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \quad II = \int_1^{\infty} \frac{2^x}{x^{x^2}} dx$$

- א. מתכנסים.
ב. לא מתכנסים.
ג. I מתכנס ו-II לא מתכנס.
ד. I לא מתכנס ו-II מתכנס.

טור I

נתבונן בטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$. נחשב את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$ ולכן לפי מבחן השורש

$$\forall x \geq 1: x \leq x^2$$



זהו טור מתכנס.

אינטגרל II

$$\frac{2^x}{x^{x^2}} \leq \frac{2^x}{x^x} \quad \forall x \geq 1$$

מתקיים:

כעת, אם נגדיר $f(x) = \frac{2^x}{x^x}$ אזי זוהי פונקציה חיובית, רציפה ומונוטונית יורדת לכל $x > 1$:

$$f(x) = \frac{2^x}{x^x} = \left(\frac{2}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{2}{x}\right)^x} = e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(1 \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}}\right) = e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - x \cdot \frac{x}{x^2}\right) =$$

$$= e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1\right) = e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{2}{x}\right) - \ln e\right) = e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot (\ln 2 - \ln x - \ln e) =$$

$$= e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)} \cdot \left(-\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \ln x\right) = -\underbrace{e^{x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right)}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln x\right)}_{>0 \quad \forall x > 1} < 0$$

ולכן לפי מבחן האינטגרל, הטור והאינטגרל מתכנסים או מתבדרים ביחד, ומכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

מתכנס (זהו טור I) אזי גם האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{2^x}{x^{x^2}} dx$ מתכנס, ומכיוון שהאינטגרל הנתון (אינטגרל II) קטן

מאינטגרל מתכנס זה אזי לפי מבחן ההשוואה הראשון גם האינטגרל הנתון מתכנס.

לכן התשובה היא (א) – שניהם מתכנסים

טורי חזקות

שאלה מספר 36 – רדיוס התכנסות

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

פתרון

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{\overbrace{((n+1)!)^2}^{(n!(n+1))^2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} \rightarrow \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

שאלה מספר 37 – רדיוס התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n} x^n \quad \text{מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור:}$$

פתרון

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!2^n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!2^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n)!2^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(n-1)!2^n}} = \frac{(2n+2)!}{(n)!2^{n+1}} \cdot \frac{(n-1)!2^n}{(2n)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!} (2n+1)(2n+2) \cancel{(n-1)!} 2^n}{\cancel{(n-1)!} n \cancel{2^n} \cdot 2} = \frac{\cancel{2} (2n+1)(n+1)}{\cancel{2} n} =$$

$$\frac{2n^2 + 3n + 1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow R = 0$$

שאלה מספר 38 – רדיוס התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!} x^n \quad \text{מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור:}$$

פתרון

עצרת כפולה

עצרת עצרת? אנחנו רואים כפול? עצרת כפולה היא מכפלת כל המספרים האי-זוגיים, כלומר:

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

$$7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

למשל:

דוגמת עזר

$$\text{נתון: } a_n = (2n-1)!! \quad \text{חשב את המנה } \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)}{(2n-1)!!} = (2n+1)$$

פתרון:

נחזור לתרגיל,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!} = \frac{(2n+1)!!}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} =$$

$$= \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} \cdot \frac{3^n}{3^n \cdot 3} = \frac{(2n+1)}{3(n+1)} = \frac{2n+1}{3n+3} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

שאלה מספר 39 – רדיוס התכנסות

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) x^n$

פתרון

דרך ראשונה – משפט הסנדביץ'

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}} \\ & \leq \sqrt[n]{2^{2n} + 2^{2n} + \dots + 2^{2n}} = \sqrt[n]{(n+1)2^{2n}} = \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{2^{2n}} = \\ & = \sqrt[n]{n+1} 2^{\frac{2n}{n}} = 2^2 \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 2^2 = 4 \\ & \geq \sqrt[n]{2^{2n}} = 2^2 = 4 \\ & \sqrt[n]{1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}} \rightarrow 4 \\ & \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

דרך שנייה – סכום של טור הנדסי

$$\begin{aligned} & a_1 = 1, q = 2^2 = 4, N = n+1 \\ & S = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n} = \frac{1(4^{n+1} - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) \\ & \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3}(4^{n+2} - 1)}{\frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)} \rightarrow 4 \\ & \Rightarrow R = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

שאלה מספר 40 – רדיוס התכנסות

מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

פתרון

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \rightarrow \frac{2}{2} = 1 \\ \Rightarrow R &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

שאלה מספר 41 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^n$

פתרון

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n} = \frac{2}{2} = 1$$

כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

מציאת תחום התכנסות

נציב את הקצוות:

קצה ימני: בהצבת $x=1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, זהו טור הרמוני מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

קצה שמאלי: בהצבת $x=-1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$.

הסדרה $a_n = \frac{1}{2n}$ הינה סדרה הרמונית יורדת ושואפת לאפס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\stackrel{?}{\leq} a_n \\ \frac{1}{2(n+1)} &\stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2n+2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2n} \\ 2n &\stackrel{?}{\leq} 2n+2 \\ 0 &\leq 2 \end{aligned}$$

דרך נוספת להראות זאת:

$$f(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \stackrel{\forall x \geq 1}{\leq} 0$$

לכן זהו טור לייבניץ מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הינו: $[-1, 1)$

שאלה מספר 42 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$

פתרון

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

מציאת תחום התכנסות: נציב את הקצוות.

קצה ימני: בהצבת $x=1$ מקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

הסדרה $a_n = \frac{1}{2n-1}$ הינה סדרה הרמונית יורדת ושואפת לאפס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

$$a_{n+1} \stackrel{?}{\leq} a_n$$

$$\frac{1}{2(n+1)-1} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{1}{2n+1} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2n-1}$$

$$2n-1 \stackrel{?}{\leq} 2n+1$$

$$-1 \leq 1$$

דרך נוספת להראות זאת: $\forall x \geq 1, f(x) = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)^2} \leq 0$

לכן לפי מסקנות לגרנדז' f מונוטונית יורדת לכל $x \geq 1$ ולכן לפי היינה a_n סדרה מונוטונית יורדת לכל $n \geq 1$ (כלומר לכל n טבעי). לכן זהו טור לייבניץ מתכנס.

קצה שמאלי: בהצבת $x=-1$ מקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, זהו טור הרמוני מתבדר.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הינו: $(-1, 1]$.

שאלה מספר 43 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$

פתרון

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

לכן $R = \frac{1}{3}$.

מציאת תחום התכנסות

נבדוק קצוות.

קצה ימני: נציב $x = \frac{1}{3}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

קצה שמאלי: נציב $x = -\frac{1}{3}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

זהו טור לייבניץ מתכנס.

לכן בסך-הכל תחום ההתכנסות הוא: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$

שאלה מספר 44 – תחום התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) x^n \quad \text{נתון הטור:}$$

(א) מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ב) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \text{פתרון סעיף א':}$$

נעבור למשתנה x ונפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{\sim \frac{0}{0} \text{ L'Hôpital's}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x+1)^2 + 1}}{\frac{1}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

ע"פ היינה נקבל כי:

$$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

סעיף ב'

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הנתון: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) x^n$

פתרון סעיף ב'

מסעיף א' הטור מתכנס ב- $(-1, 1)$. נבדוק קצוות. נציב $x = 1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

נעזר בגבול המפורסם: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ ונשווה עם הטור ההרמוני המתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

הערה: רמז להשוואה מתוך פיתוח טור מקלורן לפונקציה: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$ כלומר האיבר

הדומיננטי בפיתוח הוא x ועל-ידי הצבה מקבלים: $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \dots$, כלומר כדאי

להשוות עם האיבר הראשון והדומיננטי בפיתוח $\frac{1}{n}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

קיבלנו מספר סופי וחיובי ולכן הטור הנתון מתבדר.

נציב $x = -1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

נשים-לב כי $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ היא סדרה מונוטונית יורדת לאפס, לכן הטור הנתון הינו טור לייבניץ מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הנתון הינו: $[-1, 1)$.

שאלה מספר 45 – תחום התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n \quad \text{נתון הטור:}$$

(א) מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

(ב) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון סעיף א'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \sim \frac{0}{0}$$

לחישוב הגבול בעזרת לופיטל נעבור למשתנה רציף x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \stackrel{\sim 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} \left[-\frac{1}{(x+1)^2} \right]}{e^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$$

$$\text{לפי היינה נקבל: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = 1 \quad \text{ומכאן: } R = \frac{1}{1} = 1.$$

סעיף ב'

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n \quad \text{מצא את תחום ההתכנסות של הטור הנתון:}$$

פתרון סעיף ב'

נבדוק קצוות.

$$\text{כאשר } x = 1 \text{ נקבל את הטור: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right). \text{ נעזר בפיתוח טור מקלורן ל- } e^x:$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2!n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \dots$$

זה רומז לנו עם איזה טור כדאי להשוות. האיבר הדומיננטי ביותר של הפיתוח $e^{\frac{1}{n}} - 1$ הוא $\frac{1}{n}$, לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}} \sim \frac{0}{0} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

נשווה עם הטור ההרמוני המתבדר

נעבור למשתנה רציף x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

ולפי היינה:

$0 < 1 < \infty$ ולכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים מתבדרים או מתכנסים ביחד. הטור ההרמוני הינו טור מתבדר ולכן גם הטור הנתון מתבדר.

$$\text{כאשר } x = -1 \text{ נקבל את הטור: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) (-1)^n$$

נתבונן בסדרה $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$. נעבור למשתנה x ונגדיר את הפונקציה: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{n^2} \right) = - \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{n^2} \right) < 0 \quad \text{נחשב את הנגזרת:}$$

>0

הנגזרת תמיד שלילית ולכן הפונקציה $f(x)$ היא מונוטונית יורדת ולכן גם a_n מונוטונית יורדת.

כמו-כן: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 0$ ולכן בסך הכל a_n מונוטונית יורדת ל-0 ולכן זהו טור לייבניץ מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הינו: $[-1, 1)$.

שאלה מספר 46 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

פתרון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}_{\substack{(*) \\ \rightarrow 1}} = 1$$

$$(*) \quad n \rightarrow x: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \stackrel{\sim}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

מכאן רדיוס ההתכנסות הוא: $R=1$.

נבחן את הקצוות. נציב $x=1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

כפי שלמדנו (שאלה מספר 6 בחוברת טורים) מתקיים: $\ln n > 1$ לכל $n \geq 3$

$$\frac{\ln n}{n} \stackrel{\forall n \geq 3}{>} \frac{1}{n} \quad \text{ולכן:}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הוא טור הרמוני מתבדר ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון הטור הנתון מתבדר.

נציב $x=-1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$.

הסדרה $\frac{\ln n}{n}$ הינה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס (ראה הוכחה בסוף התרגיל), לכן לפי לייבניץ הטור הנתון מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הוא $[-1, 1)$.

הוכחה לטור לייבניץ

נראה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$ הינו טור לייבניץ מתכנס.

נבדוק את קיום שני התנאים למבחן לייבניץ:

(1) נבדוק האם הסדרה $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ היא סדרה יורדת. נסמן: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ונבדוק האם הנגזרת

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \stackrel{?}{\leq} 0 \quad \text{שלילית:}$$

הנגזרת שלילית כאשר המונה שלילי:

$$1 - \ln(x) \leq 0$$

$$\ln(x) \geq 1$$

$$x \geq e$$

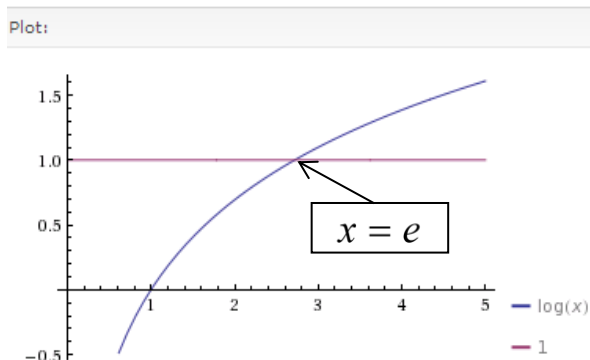
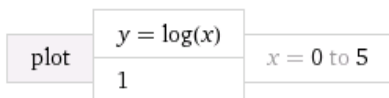
מכיוון ש- n הוא מספר טבעי ו- $e \approx 2.7$ אזי הסדרה לבטח יורדת עבור $n \geq 3$.

(2) כעת נחשב את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = ?$

שוב נעבור ל- x ים כדי לעשות לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

כלומר תנאי מבחן לייבניץ מתקיימים לכן הטור מתכנס.



שאלה מספר 47 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} x^n$

פתרון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}}{\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \underbrace{\sqrt{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}}_{\substack{(*) \\ \rightarrow 1}} = 1$$

(*) את חישוב גבול זה ראינו בשאלה הקודמת (שאלה מספר 8).

מכאן רדיוס ההתכנסות הוא: $R = 1$.

נבחן את הקצוות. נציב $x = 1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

כפי שלמדנו (שאלה מספר 5 בחוברת טורים):

הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ מתכנס כאשר $q > 1$ ומתבדר כאשר $q \leq 1$.

במקרה שלנו $q = \frac{1}{2}$ ולכן הטור מתבדר.

נציב $x = -1$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} (-1)^n$.

הסדרה $\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ הינה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס, לכן לפי לייבניץ הטור הנתון מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הוא $[-1, 1)$.

שאלה מספר 48 – תחום התכנסות של טור מוזג

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} (x-2)^n$

פתרון

על-ידי ההצבה: $t = x - 2$ נקבל את טור החזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} (x-2)^n \stackrel{t=x-2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} t^n$$

מציאת רדיוס התכנסות

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n}}{\frac{\sqrt{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+2)}{(n+1)} \rightarrow 2 \Rightarrow \boxed{R=2}$$

נחזור למשתנה המקורי, כלומר תחום ההתכנסות (לפני בדיקת הקצוות) הוא:

$$-2 < t < 2$$

$$-2 < x - 2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

מציאת תחום התכנסות

נבדוק קצוות.

נציב $x = 4$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} (4-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)}$$

האיבר הכללי מתנהג כמו: $\frac{\sqrt{n}}{(n+1)} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ לכן נשווה עם הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

שני הטורים חיוביים ומכיוון ש- $0 < 1 < \infty$ שני הטורים מתבדרים ביחד.

נציב $X = 0$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} (0-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)} (-1)^n$$

נשים-לב כי הסדרה $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)}$ הינה מונוטונית יורדת, נעבור למשתנה רציף x :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \stackrel{\forall x>1}{<} 0$$

הנגזרת תמיד שלילית לכל $x > 1$, לכן הסדרה תמיד יורדת לכל $n \geq 2$. כמו-כן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)} = 0$$

ולכן הטור הינו טור לייבניץ מתכנס. לסיכום תחום ההתכנסות הוא: $[0, 4)$.

שאלה מספר 49 – תחום התכנסות של טור מוזר

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(x-2)^n$

פתרון

על-ידי ההצבה: $t = x - 2$ נקבל את טור החזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(x-2)^n \stackrel{t=x-2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)t^n$$

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

נעבור למשתנה x ונפעיל את כלל לופיטל:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} &\stackrel{\frac{0}{0} \text{ L'Hôpital's}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

ע"פ היינה נקבל כי:

$$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

נחזור למשתנה המקורי, כלומר תחום ההתכנסות (לפני בדיקת הקצוות) הוא:

$$-1 < t < 1$$

$$-1 < x - 2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

מציאת תחום התכנסות

נבדוק קצוות.

נציב $x = 3$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(3-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

נשווה עם הטור ההרמוני המתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. מהגבול המפורסם מתקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

$0 < 1 < \infty$, שני הטורים חיוביים לכל n טבעי, הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה

השני גם הטור הנתון מתבדר.

נציב $x = 1$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(1-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(-1)^n$$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ היא סדרה מונוטונית יורדת לאפס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, לכן הטור הנתון הינו טור לייבניץ מתכנס.

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הנתון הינו: $[1, 3)$.

שאלה מספר 50 – תחום התכנסות של טור מוזז

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n}$

פתרון

נוסחת רדיוס ההתכנסות היא לטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ בלבד, לכן תחילה נביא את הטור הנתון לצורה

המבוקשת. נעזר בהצבה של $t = x^2$ ובסך הכל נקבל את הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} (x^2)^n \stackrel{t=x^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} t^n$$

נוכל כעת לחקור את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} t^n$ (לבסוף נחזור למשתנה המקורי לפי ההצבה $t = x^2$):

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{3}}$$

נחזור למשתנה המקורי, כלומר תחום ההתכנסות (לפני בדיקת הקצוות) הוא:

$$-\frac{1}{3} < t < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x^2 < \frac{1}{3}$$

$$0 \leq x^2 < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

מציאת תחום התכנסות

נבדוק קצוות.

קצה ימני: נציב $X = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

קצה שמאלי: נציב $X = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

לכן בסך-הכל תחום ההתכנסות הוא: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

שאלה מספר 51 – תחום התכנסות של טור מוזר

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n+1}$

פתרון

נוסחת רדיוס ההתכנסות היא לטור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ בלבד, לכן תחילה נביא את הטור הנתון לצורה

המבוקשת. תחילה נזכור כי המשתנה של הטור הוא n ולא x , למעשה x ביחס לטור הוא מספר, לכן ניתן למשל לשלוף אותו מחוץ לטור. כמו-כן נעזר בהצבה של $t = x^2$ ובסך הכל נקבל את הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n} \cdot x^1 = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n} \stackrel{t=x^2}{=} x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} t^n$$

הערה: ההכפלה של x מחוץ לטור היא כהכפלה של מספר ואינה משפיעה במאומה על רדיוס או על תחום ההתכנסות של הטור.

נוכל כעת לחקור את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} t^n$ (לבסוף נחזור למשתנה המקורי לפי ההצבה $t = x^2$):

מציאת רדיוס התכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}}$$

נחזור למשתנה המקורי, כלומר תחום ההתכנסות (לפני בדיקת הקצוות) הוא:

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x^2 < \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x^2 < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

מציאת תחום התכנסות

נבדוק קצוות.

קצה ימני: נציב $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

קצה שמאלי: נציב $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

לכן בסך-הכל תחום ההתכנסות הוא: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

שאלה מספר 52 – סכום שני טורים – מבחני התכנסות בהחלט

מצא את תחום ההתכנסות של הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{n} x^n$

פתרון

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{(-2)^n + 3^n}{n}}{\frac{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} =$$

$$\frac{n+1}{n} \frac{\frac{(-2)^n + 3^n}{3^n}}{\frac{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{n+1}}} = \frac{n+1}{n} \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^n + 1}{(-2) \left(-\frac{2}{3} \right)^n + 3} = \frac{1}{3}$$

לכן $R = \frac{1}{3}$. נבדוק קצוות. נציב $x = \frac{1}{3}$ ונקבל את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{n} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(-2)^n + 3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^n + 1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^n}{n}$ הינו טור מתכנס, למשל לפי מבחן השורש להתכנסות בהחלט:

מבחן השורש להתכנסות בהחלט

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו ונניח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

(1) אם $L < 1$ אזי הטור מתכנס.

(2) אם $L > 1$ אזי הטור מתבדר.

הסבר: נתבונן בטור הערכים המוחלטים: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, אם הוא מתכנס (לפי מבחן השורש למשל, אפשר כי

עכשיו הטור חיובי) אזי הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \right|} = \frac{\sqrt[n]{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

קיבלנו סכום של טור מתכנס (למשל לפי מבחן השורש) וטור מתבדר, לכן בסך-הכל הטור מתבדר.

אלטרנטיבה: להשוות את הטור שקיבלנו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n}$ (שהוא חיובי) עם הטור ההרמוני המתבדר

$$\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\frac{1}{n}} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1 \quad : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

מכיוון ש- $0 < 1 < \infty$ שני הטורים מתבדרים ביחד.

נציב $x = -\frac{1}{3}$ ונקבל את הטור:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(-1)^n ((-2)^n + 3^n)}{3^n} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2^n + (-3)^n}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

קיבלנו סכום של שני טורים מתכנסים:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ מתכנס למשל לפי מבחן השורש (הטור חיובי):

$$\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ הינו טור לייבניץ מתכנס ולכן סכום של שני טורים מתכנסים נותן טור מתכנס.

לכן בסך-הכל תחום ההתכנסות הוא: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

שאלה מספר 53 – בניית טור חזקות

תן דוגמא לטור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ שתחום התכנסותו הוא בדיוק בקטע $(2, 4]$

פתרון

נבנה טור סימטרי סביב $x = 3$ עם רדיוס התכנסות $R = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - 3)^n$

נרצה שהוא יתבדר בקצה השמאלי – כמו טור הרמוני: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

וכמו-כן שיתכנס בקצה הימני – כמו טור לייבניץ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x - 3)^n$$

זהו טור סביב $x = 3$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{n+1}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

רדיוס ההתכנסות שלו שווה ל-1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (2-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

בקצה השמאלי מתקבל טור הרמוני מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (4-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ובקצה הימני מתקבל טור לייבניץ מתכנס:

לכן ענינו על כל דרישות השאלה.

שאלה מספר 54 – טורי חזקות

נתון הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (1-x)^n$

אזי תחום ההתכנסות שלו הינו:

א. $-1 \leq x < 1$

ב. $-1 < x \leq 1$

ג. $0 \leq x < 2$

ד. $0 < x \leq 2$

ה. $0 \leq x \leq 2$

פתרון

נסדר מעט את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (1-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-1)^n (x-1)^n$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}}_{(2)}$$

שיחות אישיות בצד:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}^{\rightarrow \cos 0 = 1}}{\underbrace{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\rightarrow \cos 0 = 1}} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} = 1$$

(ראינו כבר גבולות כאלה במרתון המצולם, למשל בשאלה מספר 3)

נחזור לגבול, שני הגבולות קיימים וסופיים ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות – גבול המכפלה שווה למכפלת הגבולות ונקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\cos(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{1}{n+1})}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n+1})}}_{\rightarrow 1} = 1$$

מכאן $R=1$. תחום ההתכנסות של טור החזקות הינו: $(x_0 - R, x_0 + R)$.

בטור הנתון $x_0 = 1$ ולכן תחום ההתכנסות הפתוח הינו: $(0, 2)$.

נחשב קצוות:

$$\underline{x = 0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

מתקבל הטור:

אינטואיציה:

(1) נעזר בעובדה ש- $\ln(1+x) \sim x$ עבור x -ים מאוד מאוד קטנים וקרובים ל-0 (לפי טור טיילור-מקלורן של $\ln(1+x)$). מכאן מתקיים ש- $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ עבור n -ים מאוד מאוד גדולים ($n \gg 1$).

(2) נעזר בעובדה ש- $\cos x \sim 1$ עבור x -ים מאוד מאוד קטנים וקרובים ל-0. מכאן מתקיים ש- $\cos(\frac{1}{n}) \sim 1$ עבור n -ים מאוד מאוד גדולים ($n \gg 1$).

$$a_n \triangleq \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \stackrel{n \gg 1}{\sim} 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \triangleq b_n$$

מכאן:

והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ הינו טור הרמוני **מתבדר**. זאת-אומרת שאנחנו כבר יודעים את התשובה, עכשיו רק נותר

לנסח את הפתרון.

אם כך, נשווה את הטור הנתון עם הטור הרמוני המתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} = 1$$

משום ש- $0 < 1 < \infty$ ושני הטורים חיוביים, הרי שלפי מבחן ההשוואה השני שני גם הטור הנתון **מתבדר**.

$$\underline{x = 2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) (-1)^n$$

מתקבל הטור:

זהו טור מתחלף, הסדרה $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ הינה מונוטונית יורדת (*הוכחה פורמלית ע"י מעבר למשתנה רציף לפי היינה וגזירה כפי שכבר הראנו בלא מעט שאלות במרתון המצולם). ושואפת ל-0, לכן זהו טור לייבניץ **מתכנס**.

לכן בסה"כ תחום ההתכנסות של הטור הנתון הינו $(0, 2]$, כלומר תשובה ד. $0 < x \leq 2$.

שאלה מספר 55 – סכום הטור – טורי מקלורן

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \quad \text{נתון הטור הבא:}$$

(א) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) חשב את $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

פתרון סעיף א'

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{(-1)^n 3^n}{(n)!}} \right| = \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{3^{n-1}}{3^n} = n \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} \rightarrow \infty$$

לכן $R = \infty$ ותחום ההתכנסות הוא על כל הישר הממשי: $(-\infty, \infty)$.

פתרון סעיף ב'

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{ניזכר בפיתוח טור מקלורן של } e^x \text{ שמתכנס על כל הישר הממשי:}$$

כעת נפשט את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{(n)!} = e^{-3x}$$

כלל אצבע: אם מחסירים 1 באינדקס, מוסיפים 1 בסכום.

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = e^{-3\left(-\frac{2}{3}\right)} = e^2 \quad \text{ומכאן: } f(x) = e^{-3x} \text{ כלומר קיבלנו כי}$$

שאלה מספר 56 – סכום הטור – טורי מקלורן

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n \quad \text{נתון הטור הבא:}$$

(א) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) חשב את $f\left(\frac{1}{2e}\right)$.

פתרון סעיף א'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n}} = \frac{e}{1} = e$$

לכן רדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = \frac{1}{e}$. נבדוק קצוות:

נציב $x = \frac{1}{e}$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ שהוא טור הרמוני מתבדר.

נציב $x = -\frac{1}{e}$ ונקבל את הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} \left(-\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ שהוא טור לייבניץ מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות הינו: $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

פתרון סעיף ב'

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} : \ln(1+x) \text{ של מקלורן טור}$$

כעת נציב $-x$ ונראה כיצד ישתנה הטור:

$$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

כלומר:

כעת נפשט את הטור הנתון בשאלה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n}{n} = \ln \left(\frac{1}{1-ex} \right)$$

כלומר קיבלנו כי $f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-ex} \right)$ ומכאן:

$$f\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln \left(\frac{1}{1-e \cdot \frac{1}{2e}} \right) = \ln \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = \ln(2)$$

דרך חלופית – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

ראינו שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = \frac{1}{e}$, לכן לפי משפט לכל $x \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ ניתן לבצע גזירה

ואינטגרציה איבר-איבר. מכיוון שיש לנו n במכנה, זה רומז לנו לגזור את הטור כדי שהמקדם יצטמצם ונגיע לטור מוכר של סדרה הנדסית:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (ex)^n \stackrel{|ex|<1}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{ex}{1-ex} = \frac{e}{1-ex}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{e}{1-et} dt = e \left. \frac{\ln|1-et|}{-e} \right|_0^x = \ln|1-et| \Big|_0^x =$$

$$= \ln 1 - \ln|1-ex| \stackrel{ex<1}{=} -\ln(1-ex) = \ln \left(\frac{1}{1-ex} \right)$$

שאלה מספר 57 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

(א) הצג את $f(x)$ כטור מספרים אינסופי ומצא את תחום ההתכנסות שלו.

(ב) האם הטור $f(1)$ מתכנס?

(ג) האם הטור $f(1)$ מתכנס בהחלט/בתנאי?

(ג) כמה איברים דרוש כדי לחשב את $f(1)$ בדיוק של אלפית?

פתרון סעיף א'

נפתח את $\sin t$ לטור טיילור-מקלורן:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \frac{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right)}{t} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots\right) dt = \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} - \frac{t^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \end{aligned}$$

*בתוך תחום ההתכנסות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר. לחישוב רדיוס ההתכנסות נציב $t = x^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)(2n+1)!} \\ R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(2n+3)!}{(2n+1)(2n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)}{(2n+1)} (2n+2)(2n+3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + \dots}{2n+1} = \infty \end{aligned}$$

וכלפי x רדיוס ההתכנסות נותר ∞ לכן בסך הכל תחום ההתכנסות הוא כל הישר הממשי: $(-\infty, \infty)$

הערה: מכיוון ש- $\sin x$ מתכנסת לכל x ציפינו שאכן גם כאן תחום ההתכנסות יהיה אינסופי.

פתרון סעיף ב'

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

נשים-לב כי $\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ל-0 וכי הטור מחליף את סימניו לסירוגין, לכן זהו טור לייבניץ מתכנס.

פתרון סעיף ג'

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

נשתמש במבחן המנה, נעזר בחישוב שכבר עשינו כשחישבנו את רדיוס ההתכנסות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+1)!}{(2n+3)(2n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+3)} = 0$$

כלומר טור הערכים המוחלטים מתכנס לפי מבחן המנה ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.

פתרון סעיף ד'

נשתמש בהערכת השארית לטור לייבניץ ונדרוש כי שארית הטור תהיה קטנה מאלפית:

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} < \frac{1}{1000}$$

$$n=0: \quad \frac{1}{3 \cdot 3!} = \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{1}{18}$$

$$n=1: \quad \frac{1}{5 \cdot 5!} = \frac{1}{5 \cdot 120} = \frac{1}{600}$$

$$n=2: \quad \frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{7 \cdot 5040} < \frac{1}{1000}$$

כלומר יש לחבר שלושה איברים בטור $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$ על-מנת להגיע לדיוק של

אלפית.

שאלה מספר 58 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה

נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

(א) הצג את $f(x)$ כטור מספרים אינסופי ומצא את תחום ההתכנסות שלו.

(ב) האם הטור $f(1)$ מתכנס?

(ג) האם הטור $f(1)$ מתכנס בהחלט/בתנאי?

(ג) כמה איברים דרוש כדי לחשב את $f(1)$ בדיוק של אלפית?

פתרון סעיף א'

נפתח את e^{-t^2} לטור טיילור-מקלורן:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 + (-t^2) + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \dots \right) dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt =$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]_0^x = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

*בתוך תחום ההתכנסות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר. לחישוב רדיוס ההתכנסות נציב $t = x^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)}{(2n+1)} (n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \dots}{2n+1} = \infty$$

וכלפי x רדיוס ההתכנסות נותר ∞ לכן בסך הכל תחום ההתכנסות הוא כל הישר הממשי: $(-\infty, \infty)$

הערה: מכיוון ש- e^x מתכנסת לכל x ציפינו שאכן גם כאן תחום ההתכנסות יהיה אינסופי.

פתרון סעיף ב'

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

נשים-לב כי $\frac{1}{(2n+1)n!}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ל-0 וכי הטור מחליף את סימניו לסירוגין, לכן זהו טור לייבניץ מתכנס.

פתרון סעיף ג'

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

נשתמש במבחן המנה, נעזר בחישוב שכבר עשינו כשחישבנו את רדיוס ההתכנסות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} = 0$$

כלומר טור הערכים המוחלטים מתכנס לפי מבחן המנה ולכן הטור המקורי מתכנס בהחלט.

פתרון סעיף ד'

נשתמש בהערכת השארית לטור לייבניץ ונדרוש כי שארית הטור תהיה קטנה מאלפית:

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

$$n=0: \quad \frac{1}{3 \cdot 1!} = \frac{1}{3}$$

$$n=1: \quad \frac{1}{5 \cdot 2!} = \frac{1}{10}$$

$$n=2: \quad \frac{1}{7 \cdot 3!} = \frac{1}{42}$$

$$n=3: \quad \frac{1}{9 \cdot 4!} = \frac{1}{9 \cdot 24} = \frac{1}{216}$$

$$n=4: \quad \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{11 \cdot 120} = \frac{1}{1240} < \frac{1}{1000}$$

כלומר יש לחבר חמישה איברים ראשונים בטור $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ על-מנת להגיע לדיוק של אלפית.

שאלה מספר 59 – הצגת אינטגרל כטור וחישוב דיוק שגיאה

חשב בדיוק של 0.001 את האינטגרל $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^3} dx$

פתרון

נפתח את הפונקציה באינטגרנד לטור טיילור-מקלורן, לפי הפיתוח המוכר:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{1-(-x^3)} = 1 + (-x^3) + (-x^3)^2 + (-x^3)^3 + \dots = \\ &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} \end{aligned}$$

נגדיר את הפונקציה הבאה באופן כללי: $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt$

כאשר האינטגרל הנתון הינו $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

בתחום ההתכנסות הפתוח של הטור (חושב בהמשך) ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{3n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{3n+1}}{3n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1} \end{aligned}$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(3n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)}{(3n+1)} = 1$$

כלומר תחום ההתכנסות הפתוח הינו $(-1,1)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}} \quad \text{כעת הטור המתקבל הינו:}$$

נשים-לב כי $a_n = \frac{1}{(3n+1)2^{3n+1}}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ושואפת ל-0, וכי הטור מחליף את

סימניו לסירוגין, לכן זהו טור לייבניץ מתכנס. נחשב את האיבר ה- a_{n+1} בטור לייבניץ:

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)2^{3n+1}} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)+1)2^{3(n+1)+1}} = \frac{1}{(3n+4)2^{3n+4}}$$

נשתמש כעת בהערכת השארית לטור לייבניץ ונדרוש כי שארית הטור תהיה קטנה מאלפית:

$$|R_n| < a_{n+1} = \frac{1}{(3n+4)2^{3n+4}} < \frac{1}{1000}$$

$$n=0: \quad \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{1}{64}$$

$$n=1: \quad \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{1}{7 \cdot 128} = \frac{1}{896}$$

$$n=2: \quad \frac{1}{10 \cdot 2^{10}} = \frac{1}{10 \cdot 1024} = \frac{1}{10,240} < \frac{1}{1000}$$

כלומר יש לחבר שלושה איברים בטור על-מנת להגיע לדיוק של אלפית (אפילו של 0.0001).

מכאן בהצבת שלושה איברים ראשונים בטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}$ נקבל הערכה לאינטגרל הנתון עם

שגיאה שקטנה מאלפית כדרוש:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{64} + \frac{1}{896} \approx 0.485491$$

ואכן אם נשתמש במחשבון אינטגרלים לחישוב האינטגרל נקבל:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^3} dx \approx 0.485402$$

ואכן ההפרש קטן מאלפית:

$$0.485491 - 0.485402 = 0.000089 < 0.001$$

(מעניין לראות שאם נסכום רק שני איברים בטור נקבל תוצאה עם שגיאה שקצת גדולה מאלפית, כלומר אכן דרוש סכום של לפחות שלושה איברים ראשונים כדי לקבל דיוק שקטן מאלפית, בדיוק כפי שקיבלנו לעיל).

שאלה מספר 60 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

חשב את סכום הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{4^n}$

פתרון

שלב ראשון – מציאת טור חזקות מתאים

נשים-לב כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \Big|_{x=\frac{1}{2}}$$

אזי נגדיר טור חזקות: $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. בשאלה רוצים את $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

שלב שני – מציאת רדיוס ההתכנסות של טור החזקות

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

שלב שלישי – מציאת סכום הטור על-ידי גזירה ואינטגרציה איבר איבר בתחום ההתכנסות

לפי משפט בתחום ההתכנסות $(-1,1)$ ניתן לבצע גזירה ואינטגרציה איבר איבר. נרצה שהמקדם

במונה יצטמצם כדי שנקבל טור פשוט של סדרה הנדסית לכן נעשה אינטגרל על הטור.

צריך קצת לסדר את החזקה לפי האינטגרציה:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 2x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}_{\triangleq g(x)} = 2x \cdot g(x)$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (nt^{n-1}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

כעת נחזור בחזרה ל- $g(x)$ על-ידי גזירה לפונקציה:

$$g(x) = G'(x) = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = 2x \cdot g(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} \quad : f(x) \text{ לבחזרה ל-}$$

שלב רביעי – הצבת ערך ה- x הרצוי לפונקציה שמצאנו

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad x = \frac{1}{2} \in (-1, 1) \text{ שייך לתחום ההתכנסות מכאן:}$$

שאלה מספר 61 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

חשב את סכום הטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$

פתרון

שלב ראשון – מציאת טור חזקות מתאים

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \Big|_{x=\frac{1}{2}} \quad \text{נשים-לב כי:}$$

אזי נגדיר טור חזקות: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}$. בשאלה רוצים את $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

שלב שני – מציאת רדיוס ההתכנסות של טור החזקות

לחישוב רדיוס ההתכנסות נציב: $t = x^2$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{(2n+1)} x^{2n} \Big|_{t=x^2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} t^n$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{2}{2} = 1$$

לכן תחום ההתכנסות (ללא קצוות) הינו: $-1 < x < 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow |t| < 1$,

כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

שלב שלישי – מציאת סכום הטור על-ידי גזירה ואינטגרציה איבר-איבר בתחום ההתכנסות

לפי משפט בתחום ההתכנסות ניתן לבצע גזירה ואינטגרציה איבר-איבר. נרצה שהמקדם במכנה יצטמצם כדי שנקבל טור פשוט של סדרה הנדסית לכן נגזור את הטור.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

כעת נחזור בחזרה ל- $f(x)$ על-ידי אינטגרציה לפונקציה:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$$

לפי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

$$1 = A(1+t) + B(1-t)$$

$$1 = (A+B) + (A-B)t$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases}$$

$$A=B=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \frac{\ln|1-t|}{(-1)} + \frac{1}{2} \ln|1+t| \right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln|1+x| - \ln|1-x|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{בסך הכל קיבלנו:}$$

שלב רביעי – הצבת ערך ה- x הרצוי לפונקציה שמצאנו

$$x = \frac{1}{2} \in (-1,1) \quad \text{שייך לתחום ההתכנסות מכאן:}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3}{1} \right| = \frac{1}{2} \ln 3$$

שאלה מספר 62 – שאלת מח חריף

הוכח/הפרך את הטענה הבאה:

אם טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בקטע $(-R, R)$ אזי גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{n}{x} + \frac{x}{n+1} \right)$ מתכנס באותו הקטע.

(התשובה בעמוד הבא)

פתרון

הטענה נכונה, נוכיח:

לפי משפט, טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בקטע $(-R, R)$ לפונקציה רציפה: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

אזי:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \left(\frac{n}{x} + \frac{x}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_n x^{n-1} + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = f'(x) + F(x) \end{aligned}$$

אלו הם טור הנגזרות וטור האינטגרלים של הטור המקורי ולפי משפט יש להם את אותו רדיוס ההתכנסות!

בעיות אקסטרמום

שאלה מספר 63 – מינימום ומקסימום מוחלטים

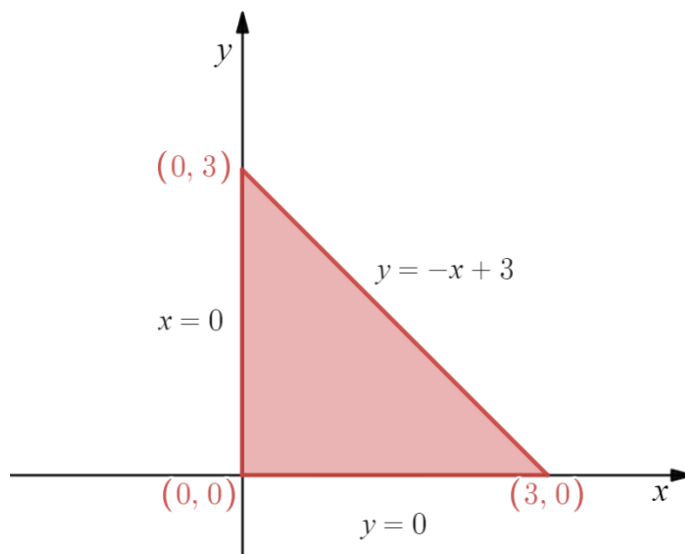
נתונה פונקציה: $f(x, y) = e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y}$ מעל התחום D , שמורכב ממשולש סגור שקודקודיו: $(0, 3), (0, 0), (3, 0)$.

(א) מצא את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה (נקודות הקיצון המוחלט (גלובלי))
(ב) הוכח שהנקודה $(1, 1)$ היא נקודת אוקף.

פתרון סעיף א'

שלב ראשון – שרטוט התחום (פנים, שפות, פינות)

נשרטט את התחום.



שלב שני – בדיקת קיום תנאי משפט W

התחום הינו סגור וחסום, f רציפה בתחום כהרכבה של פולינום על פונקציה מעריכית ולכן לפי משפט הפונקציה מקבלת בתחום מקסימום ומינימום מוחלטים.

שלב שלישי – מציאת נקודות קריטיות (א) נקודות קריטיות בתוך התחום

$$f(x, y) = e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y}$$

$$1) f'_x = (x + y - 2)e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} = 0$$

$$2) f'_y = (-2y + x + 1)e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} = 0$$

$$1) x + y = 2$$

$$2) x - 2y = -1$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1, 1)$$

$$f(1, 1) = e^{\frac{1}{2} - 1 + 1 - 2 + 1} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} : f \text{ נציב לפונקציה}$$

(ב) נקודות קריטיות על השפה

כאן השפות הן פשוטות (קווים ישרים): $x = 0$, $y = 0$, $y = 3 - x$. נציב אותן ישירות לפונקציה:

$$x = 0: f(0, y) = e^{-y^2 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = (-2y + 1)e^{-y^2 + y} = 0$$

$$\Rightarrow (-2y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(0, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

$$\begin{aligned}
 y = 0: f(x, 0) &= e^{\frac{x^2}{2} - 2x} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) &= (x - 2)e^{\frac{x^2}{2} - 2x} = 0 \\
 \Rightarrow (x - 2) &= 0 \\
 \Rightarrow x = 2 &\Rightarrow (x, y) = (2, 0) \\
 \Rightarrow f(2, 0) &= e^{2-4} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = 3 - x: f(x, 3 - x) &= e^{\frac{x^2}{2} - (3-x)^2 + x(3-x) - 2x + (3-x)} = \\
 &= e^{\frac{x^2}{2} - (x^2 - 6x + 9) + 3x - x^2 - 2x + 3 - x} = e^{-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 3 - x) &= (-3x + 6)e^{-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6} = 0 \\
 \Rightarrow (-3x + 6) &= 0 \\
 \Rightarrow x = 2 &\Rightarrow (x, y) = (2, 1) \\
 \Rightarrow f(2, 1) &= e^{2-1+2-4+1} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

ג) נקודות קריטיות בפינות

פינות התחום הן קודקודי המשולש: $(0, 3), (0, 0), (3, 0)$. נציב אותן ישירות ל- f :

$$f(0, 3) = e^{-9+3} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

$$f(0, 0) = e^0 = 1$$

$$f(3, 0) = e^{4.5-6} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

שלב רביעי – סיכום כל הנקודות הקריטיות

בתוך התחום: $(1,1)$.

על שפות התחום: $(2,1)$, $(2,0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

בפינות התחום: $(0,3)$, $(0,0)$, $(3,0)$

$$f(1,1) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

$$f(2,0) = e^{-2}$$

$$f(2,1) = e^0$$

$$f(0,3) = e^{-6}$$

$$f(0,0) = e^0$$

$$f(3,0) = e^{-\frac{3}{2}}$$

מכאן הערך המקסימלי של הפונקציה הוא מתקבל על השפה בנקודה - $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ והוא $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$

והערך המינימלי של הפונקציה מתקבל בפינה בנקודה - $(0,3)$ והוא $f(0,3) = e^{-6}$

פתרון סעיף ב'

איפיון נקודות קריטיות

נאפיין את הנקודה על-ידי מטריצת ההסיאן: $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \bigg|_{(x_0, y_0)}$

$$f_{xx}''(x, y) = 1 \cdot e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} + (x + y - 2)^2 e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} =$$

$$= \left[(x + y - 2)^2 + 1 \right] e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} \Rightarrow f_{xx}''(1, 1) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f_{yy}''(x, y) = (-2) e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} + (-2y + x + 1)^2 e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} =$$

$$= \left[(-2y + x + 1)^2 - 2 \right] e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} \Rightarrow f_{yy}''(1, 1) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f_{xy}''(x, y) = 1 \cdot e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} + (x + y - 2)(-2y + x + 1) e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} =$$

$$= \left[(x + y - 2)(-2y + x + 1) + 1 \right] e^{\frac{x^2}{2} - y^2 + xy - 2x + y} \Rightarrow f_{xy}''(1, 1) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

נציב את הנקודה:

$$\Delta(1, 1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}} & \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & -\frac{2}{\sqrt{e}} \end{vmatrix} = \frac{1}{e} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{e} (-2 - 1) = -\frac{3}{e} < 0$$

$\Leftarrow (1, 1)$ נקודת אוקף.

הערה: מכיוון שפונקציית האקספוננט הינה מונוטונית עולה, יכולנו לקחת במקומה רק את פונקציית המעריך (החזקה) שלה ולחקור אותה אך מכיוון שהחישובים כאן אינם מסובכים (גזירה פשוטה של אקספוננט), המשכנו עם הפונקציה המקורית.

שאלה מספר 64 – כופלי לגרנז'

מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה: $f(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{2}$

$$D = \{(x, y) | y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 24 - 2y\}$$
 בתחום

פתרון

שלב ראשון – שרטוט התחום (פנים, שפות, פינות)

נשרטט את התחום, מדובר בתחום הכלוא בין שני ישרים (פונקציית הערך המוחלט $y = |x|$) לבין המעגל שמרכזו ב- $(0, -1)$ ורדיוסו $R = 5$:

$$x^2 + y^2 \leq 24 - 2y$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y \leq 24$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 - 1 \leq 24$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 25$$

נמצא נקודות חיתוך בין פונקציית הערך המוחלט $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ לבין המעגל, נתחיל

מןקודת החיתוך בין הקרן החיובית של פ' הערך המוחלט: $x \geq 0, y = x$, לבין משוואת המעגל:

$$x^2 + (x+1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

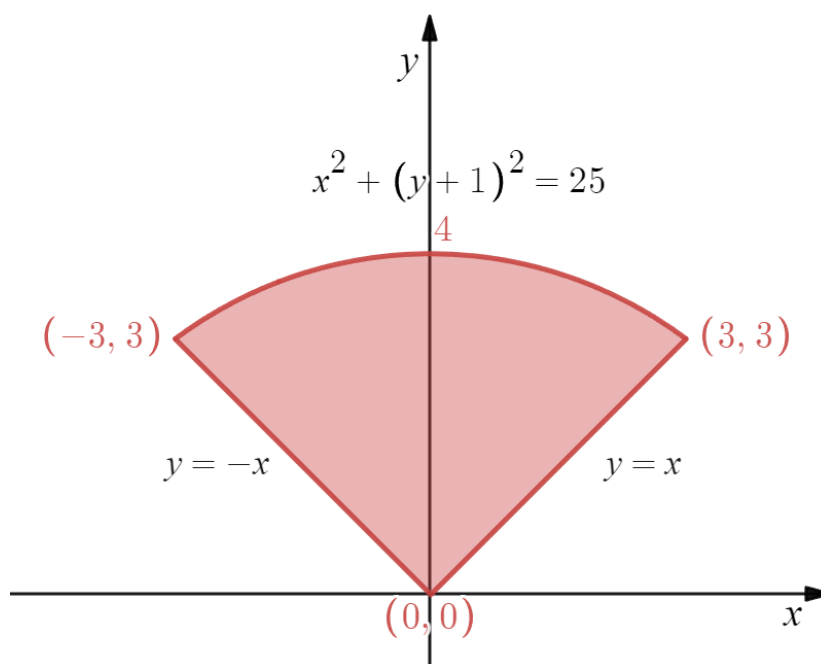
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 \neq -4$$

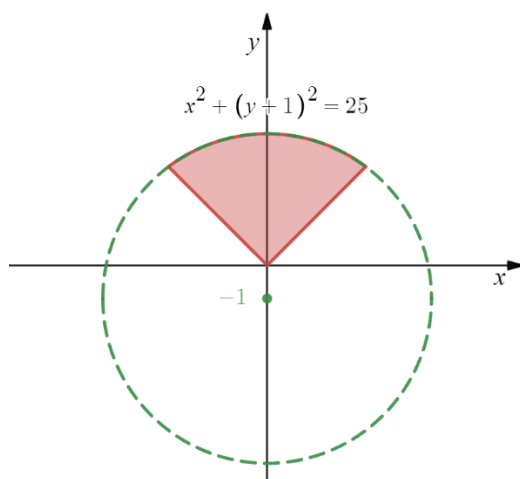
כלומר נקודת החיתוך היא: $(3, 3)$. מטעמי סימטריה נקודת החיתוך של משוואת המעגל עם הקרן

השלילית של פ' הערך המוחלט הינה $(-3, 3)$.

איור התחום:



איור התחום, "Zoom Out". שימו-לב כי מרכז המעגל נמצא ב- $(0, -1)$.



שלב שני – בדיקת קיום תנאי משפט W

התחום הינו סגור וחסום, f רציפה בתחום כפולינומים ולכן לפי משפט W הפונקציה מקבלת בתחום מקסימום ומינימום מוחלטים.

שלב שלישי – מציאת נקודות קריטיות

(א) נקודות קריטיות בתוך התחום

$$f(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{2}$$

$$1) f'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2) f'_y = -y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

אין נקודות קריטיות בתוך התחום (זוהי נקודת פינה). ערך הפונקציה בנקודה: $f(0, 0) = 0$.

(ב) נקודות קריטיות על השפה

כאן יש שתי שפות פשוטות (קווים ישרים): $y = |x|$ ושפה אחת מורכבת (שפת המעגל). נתחיל מהשפות הפשוטות, נציב אותן ישירות לפונקציה:

$$f(x, |x|) = x^2 - \frac{|x|^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$f'_x = x = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

כדי למצוא נק' קריטיות על גבי שפת המעגל, נשתמש במשפט כופלי לגרנז', נבדוק שתנאי המשפט מתקיימים:

נתונה: $f(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{2}$, נגדיר: $g(x, y) = x^2 + (y+1)^2 - 25 = 0$, $f, g \in C^1$, כפולינומים.

בנוסף:

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2(y+1)) \stackrel{?}{=} (0, 0)$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, -1)$$

אבל נקודה $(0, -1)$ אינה על האילוף ולכן $\nabla g \neq 0$ על האילוף. אזי נגדיר:

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{2} - \lambda(x^2 + (y+1)^2 - 25)$$

ונחפש את הנקודות הקריטיות של L : $\nabla L = \nabla f - \lambda \nabla g = 0$

$$1) L'_x = 2x - \lambda(2x) = 0$$

$$2) L'_y = -y - \lambda[2(y+1)] = 0$$

$$3) x^2 + (y+1)^2 - 25 = 0$$

$$1) (1-\lambda)x = 0$$

$$2) -(1+2\lambda)y - 2\lambda = 0$$

$$3) x^2 + (y+1)^2 - 25 = 0$$

ממשוואה (1) $\lambda = 1$:

$$1) \lambda = 1$$

$$2) -(1+2)y - 2 = 0 \Rightarrow -3y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$

לכן עבור $\lambda \neq 1$ מקבלים בהכרח ממשוואה (1) ש- $x = 0$ וניתן להציב ישירות למשוואת האילוף (3):

$$1) x = 0$$

$$3) 0 + (y+1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (y+1) = \pm 5$$

$$\Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -6$$

הערך $y = -6$ לא בתחום (!) כלומר התקבלה הנקודה $(0, 4)$.

$$\text{ערך הפונקציה בנקודה: } f(0, 4) = -\frac{16}{2} = -8$$

ג) נקודות קריטיות בפינות

פינות התחום הן: $(-3, 3), (0, 0), (3, 3)$. נציב אותן ישירות ל- f :

$$f(-3, 3) = f(3, 3) = 9 - \frac{9}{2} = 4.5$$

$$f(0, 0) = 0$$

שלב רביעי – סיכום כל הנקודות הקריטיות

$$f(0,4) = -8$$

$$f(-3,3) = f(3,3) = 9 - \frac{9}{2} = 4.5$$

$$f(0,0) = 0$$

בתוך התחום: אין נק' קריטיות.

על שפת התחום: $(0,4)$.

בפינות התחום: $(-3,3), (0,0), (3,3)$.

מכאן הערך הגדול של הפונקציה הוא 4.5 ומתקבל בשתיים מפינות התחום בנקודות: $(-3,3), (3,3)$

והערך הקטן ביותר שלה הוא -8 ומתקבל על שפת התחום בנקודה: $(0,4)$.

שאלה מספר 65 – מיון נקודות חשודות לקיצון

$$f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{תהי פונקציה}$$

מצאו את הנקודות החשודות לקיצון של f ומיינו אותן לפי מינימום מקסימום או אוקף.

פתרון

נמצא את כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון ושני:

$$f'_x = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2+y^2} - (1+x-y) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} = \frac{(1+x^2+y^2) - (1+x-y)x}{\sqrt{1+x^2+y^2} \cdot (1+x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{1+x^2+y^2-x-x^2+xy}{\sqrt{1+x^2+y^2} (1+x^2+y^2)} = \frac{y^2+xy-x+1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'_y = \frac{(-1) \cdot \sqrt{1+x^2+y^2} - (1+x-y) \cdot \frac{2y}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} = \frac{-(1+x^2+y^2) - (1+x-y)y}{\sqrt{1+x^2+y^2} \cdot (1+x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{-1-x^2-y^2-y-xy+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2} (1+x^2+y^2)} = \frac{-x^2-xy-y-1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2+xy+y+1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial f'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2+xy-x+1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{(y-1)(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (y^2+xy-x+1) \cdot \frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \left[(y-1)(1+x^2+y^2) - (y^2+xy-x+1) \cdot 3x \right]}{(1+x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(y-1)(1+x^2+y^2) - 3x(y^2+xy-x+1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}}$$

$$\begin{aligned}
 f_{yy}'' &= \frac{\partial f_y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x^2 + xy + y + 1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\
 &= -\frac{(x+1)(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + xy + y + 1) \cdot \frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^3} = \\
 &= -\frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \left[(x+1)(1+x^2+y^2) - (x^2 + xy + y + 1) \cdot 3y \right]}{(1+x^2+y^2)^3} = \\
 &= -\frac{(x+1)(1+x^2+y^2) - 3y(x^2 + xy + y + 1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}} \\
 f_{xy}'' &= \frac{\partial f_x'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2 + xy - x + 1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\
 &= \frac{(2y+x)(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (y^2 + xy - x + 1) \cdot \frac{3}{2}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^3} = \\
 &= \frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \left[(2y+x)(1+x^2+y^2) - (y^2 + xy - x + 1) \cdot 3y \right]}{(1+x^2+y^2)^3} = \\
 &= \frac{(2y+x)(1+x^2+y^2) - 3y(y^2 + xy - x + 1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}}
 \end{aligned}$$

מציאת נקודות חשודות לקיצון:

$$(1) \quad f_x' = \frac{y^2 + xy - x + 1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$(2) \quad f_y' = -\frac{x^2 + xy + y + 1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$(1) y^2 + xy - x + 1 = 0$$

$$(2) x^2 + xy + y + 1 = 0$$

נשים-לב כי ישנה סימטריה במשוואות וכי אם נחסר אותן גורמים יצטמצמו יפה:

$$(1) - (2) = (3)^*: (y - x)(y + x) - (y + x) = 0 \Rightarrow (y + x)(y - x - 1) = 0$$

$$y = -x \text{ or } y = x + 1$$

מקרה $y = -x$, נציב במשוואה (1):

$$(1) x^2 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

מקרה $y = x + 1$, נציב במשוואה (2):

$$(2) x^2 + x(x + 1) + (x + 1) + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

אין פתרון.

כלומר בסך הכל קיבלנו נקודה יחידה חשודה לקיצון: $(1, -1)$.

נציב במטריצת ההסיאן:

$$\begin{aligned} \Delta(1, -1) &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(1, -1)} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{(y-1)(1+x^2+y^2) - 3x(y^2+xy-x+1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}} & \frac{(2y+x)(1+x^2+y^2) - 3y(y^2+xy-x+1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}} \\ \frac{(2y+x)(1+x^2+y^2) - 3y(y^2+xy-x+1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}} & -\frac{(x+1)(1+x^2+y^2) - 3y(x^2+xy+y+1)}{(1+x^2+y^2)^{2.5}} \end{vmatrix}_{(1, -1)} = \\ &= \frac{1}{3^5} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^5} (36 - 9) = \frac{1}{3^5} 27 = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} > 0 \end{aligned}$$

קיבלנו: $\begin{cases} f_{xx}(1, -1) = -6 < 0 \\ \Delta(1, -1) > 0 \end{cases}$ לכן הנקודה $(1, -1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלה מספר 66 – מינימום ומקסימום תחת אילוץ

מצאו את ערכי המינימום והמקסימום המוחלטים של $f(x, y, z) = xy + z + z^2$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

פתרון

התחום הינו ספירה, סגורה וחסומה, f רציפה בתחום כפ' פולינומים ולכן לפי משפט W הפונקציה מקבלת בתחום מקסימום ומינימום מוחלטים.

נתונה: $f(x, y, z) = xy + z + z^2$, נגדיר: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $f, g \in C^1$,

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0) \quad \text{כפולינומים. בנוסף:}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

אבל נקודה $(0, 0, 0)$ אינה על האילוץ ולכן $\nabla g \neq 0$ על האילוץ. אזי נגדיר:

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = xy + z + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

ונחפש את הנקודות הקריטיות של L : $\nabla L = \nabla f - \lambda \nabla g = 0$

$$\begin{aligned} (1) \quad L'_x &= y - \lambda(2x) = 0 \\ (2) \quad L'_y &= x - \lambda(2y) = 0 \\ (3) \quad L'_z &= 1 + 2z - \lambda(2z) = 0 \\ (4) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad y - 2\lambda x &= 0 \\ (2) \quad x - 2\lambda y &= 0 \\ (3) \quad 1 + 2z - 2\lambda z &= 0 \\ (4) \quad x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

משוואות (1) ו-(2) הן סימטריות ביחס ל- x ו- y לכן נשתמש בתעלול ידוע – נחסר משוואות:

$$\begin{aligned} (1) + (2) &= (1)^*: (y + x) - 2\lambda(y + x) = 0 \Rightarrow (y + x)(1 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow y = -x \text{ or } \lambda = \frac{1}{2} \\ (1) - (2) &= (2)^*: (y - x) + 2\lambda(y - x) = 0 \Rightarrow (y - x)(1 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow y = x \text{ or } \lambda = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

מקרה $y = x$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$$(1)^* \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(2)^* y = x$$

$$(3) 1 + 2z - 2 \cdot \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow 1 + z = 0 \Rightarrow z = -1$$

$$(4) x^2 + x^2 + (-1)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right) \text{ or } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right)$$

נציב את הנקודות ל- f :

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right) = \frac{3}{2} - 1 + 1 = \frac{3}{2}$$

מקרה $y = -x$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$(1)^* y = -x$$

$$(2)^* \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$(3) 1 + 2z + 2 \cdot \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow 1 + 3z = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$(4) x^2 + (-x)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = \frac{35}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{35}{18}} \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{35}{18}}, -\sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) \text{ or } \left(-\sqrt{\frac{35}{18}}, \sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right)$$

נציב את הנקודות ל- f :

$$f\left(\sqrt{\frac{35}{18}}, -\sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{35}{18}}, \sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{35}{18} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{-35 - 6 + 2}{18} = -\frac{39}{18} = -\frac{13}{6}$$

מקרה $y = -x$, $y = x$

$$\left. \begin{array}{l} (1)^* y = -x \\ (2)^* y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$$(4) 0 + 0 + z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 2) \text{ or } (0, 0, -2)$$

$$f(0, 0, 2) = 0 + 2 + 4 = 6$$

$$f(0, 0, -2) = 0 - 2 + 4 = 2$$

נציב את הנקודות ל- f :

וכמובן שלא יכול להיות מקרה שבו גם $\lambda = \frac{1}{2}$ וגם $\lambda = -\frac{1}{2}$ בו-זמנית.

נערוך רשימה של ערכי f :

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{35}{18}}, -\sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{35}{18}}, \sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{6}$$

$$f(0, 0, 2) = 6$$

$$f(0, 0, -2) = 2$$

$$f_{\max}(0, 0, 2) = 6$$

$$f_{\min}\left(\sqrt{\frac{35}{18}}, -\sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = f_{\min}\left(-\sqrt{\frac{35}{18}}, \sqrt{\frac{35}{18}}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{6}$$

לסיכום:

שאלה מספר 67 – כופלי לגרנז'

נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = xyz$. מצא את ערכה המקסימלי בתחום:

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

פתרון

נשים-לב כי f רציפה וכי התחום הינו סגור וחסום ולכן לפי ויירשטראס קיים מינימום ומקסימום של f בתחום.

בפנים התחום

נגזור ונשווה לאפס:

$$f'_x = yz = 0$$

$$f'_y = xz = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow f(0, 0, 0) = 0$$

$$f'_z = xy = 0$$

על השפה נגדיר פונקציה ואילוץ:

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

מתקיים כי $f, g \in C^1$, כמו-כן $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ מתאפס רק ב- $(0, 0, 0)$ אבל נקודה זו לא על

האילוץ, לכן $\nabla g \neq 0$ על האילוץ כנדרש. לכן לפי משפט כופלי לגרנז' נתבונן ב- $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$

ונקבל 3 משוואות בנוסף למשוואת האילוץ, בסך הכל מתקבלות ארבעת המשוואות הבאות:

$$(1) \quad yz - 2\lambda x = 0$$

$$(2) \quad xz - 2\lambda y = 0$$

$$(3) \quad xy - 2\lambda z = 0$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

נסדר אותן ונעשה מניפולציה אלגברית:

$$(1) \quad yz = 2\lambda x \quad / \cdot x$$

$$(2) \quad xz = 2\lambda y \quad / \cdot y$$

$$(3) \quad xy = 2\lambda z \quad / \cdot z$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(1) \quad xyz = 2\lambda x^2$$

$$(2) \quad xyz = 2\lambda y^2$$

$$(3) \quad xyz = 2\lambda z^2$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

כעת אם נחבר את שלושת המשוואות הראשונות:

$$3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=1} = 2\lambda$$

$$2\lambda = 3xyz$$

כלומר קיבלנו:

נחזור למשוואות ונציב את 2λ שקיבלנו:

$$(1) \quad xyz = 3x^3yz$$

$$(2) \quad xyz = 3xy^3z$$

$$(3) \quad xyz = 3xyz^3$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

נסדר:

$$(1) \quad xyz(1 - 3x^2) = 0$$

$$(2) \quad xyz(1 - 3y^2) = 0$$

$$(3) \quad xyz(1 - 3z^2) = 0$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

נחלק למקרים:

מקרה: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

אלו הן 8 נקודות שונות (יש 8 אפשרויות לשילובים של פלוסים ומינוסים):

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{(\sqrt{3})^3} = \pm\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = \pm 3^{-\frac{3}{2}}$$

ערך הפונקציה בנקודות יהיה בהתאמה:

מקרה: $x = 0, y \neq 0, z \neq 0$:

נחזור למשוואות הראשונות:

$$\begin{aligned} (1) \quad & yz = 2\lambda x \\ (2) \quad & xz = 2\lambda y \\ (3) \quad & xy = 2\lambda z \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

אם $x = 0$ יוצא מהן שגם $y = 0$ וגם $z = 0$, אבל נקודה זו לא מקיימת את משוואת האילוץ
באותו אופן לא יכולים להיות גם מקרים $x \neq 0, y = 0, z \neq 0$ או $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$.

מקרה: $x = 0, y = 0, z \neq 0$, נציב במשוואת האילוץ ונקבל:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + z^2 &= 1 \\ \Rightarrow z &= \pm 1 \end{aligned}$$

כלומר 2 נקודות $(0, 0, \pm 1)$ וערך הפונקציה: $f(0, 0, \pm 1) = 0$

ובאופן דומה אם $x = 0, y \neq 0, z = 0$ או $x \neq 0, y = 0, z = 0$, בסך הכל מתקבלות 6 נקודות:

$$(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)$$

וערך הפונקציה בכל 6 הנקודות: $f = 0$.

סיכום

$$8 \text{ נקודות מהצורה } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ כר ש- } f = \pm 3^{-\frac{3}{2}}$$

$$6 \text{ נקודות מהצורה } (0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0) \text{ כר ש- } f = 0$$

נקודה אחת בתוך התחום $(0, 0, 0)$ כר ש- $f = 0$.

הערך המקסימלי של f בתחום הינו $f = 3^{-\frac{3}{2}}$

שאלה מספר 68 – בעיית מינימום

חשב את המרחק הקצר ביותר המתקבל בין ספירה בעלת רדיוס 1 לנקודה $(2, 1, -2)$.

פתרון דרך ראשונה – כופלי לגרנז'

נגדיר: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, אזי $F(x, y, z) \in C^1$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) ובסביבתה כך ש- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ וגם $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \neq 0$ לכל נקודה פרט לראשית (שלא נמצאת על שפתה) ולכן לפי משפט הפונקציות הסתומות המישור המשיק למשטח $F(x, y, z) = 0$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) נתון על-ידי:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

$$2x_0 \cdot (x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0) + 2z_0 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$x_0 \cdot (x - x_0) + y_0 \cdot (y - y_0) + z_0 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - \underbrace{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}_{=1} = 0$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - 1 = 0$$

המרחק בין הנקודה $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, -2)$ למישור לעיל נתון על-ידי:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_0 + y_0 - 2z_0 - 1|}{\underbrace{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}_{=1}} = |2x_0 + y_0 - 2z_0 - 1|$$

אזי נגדיר את הפונקציה ואת האילוצ:

$$f(x, y, z) = 2x + y - 2z - 1$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

אזי $f, g \in C^1$ ומתקיים:

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \neq 0 \quad (2)$$

אזי לפי משפט לגרנז' אם ל- f יש ערך אקסטרימלי בנקודה (x_0, y_0, z_0) בכפוף לאילוץ אזי קיים קבוע λ כך ש-

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) - \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ -2 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{3}{2}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{מקרה } \lambda = \frac{3}{2} :$$

$$\Rightarrow d = \left| 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 \right| = \left| \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 1 \right| = \left| \frac{9}{3} - 1 \right| = |3 - 1| = 2$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{מקרה } \lambda = -\frac{3}{2} :$$

$$\Rightarrow d = \left| 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \right| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - 1 \right| = \left| -\frac{9}{3} - 1 \right| = |-3 - 1| = 4$$

f רציפה והספירה היא קבוצה סגורה וחסומה, לכן לפי משפט וויירשטראס מקסימום ומינימום מתקבלים על האילוץ. מכאן המרחק המינימלי הוא $d = 2$ שמתקבל בנקודה $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

פתרון דרך שנייה – גיאומטרית ישירה

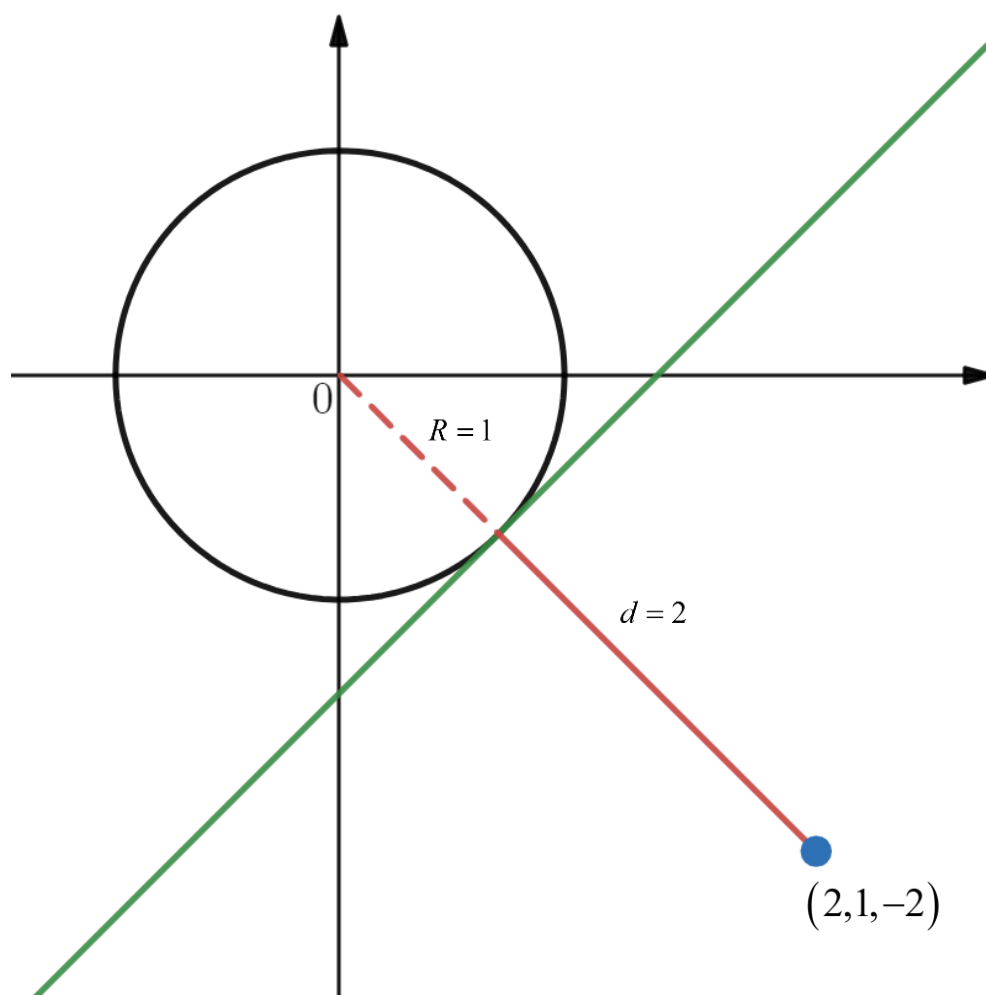
נחשב את המרחק מהראשית $(0,0,0)$ אל הנקודה $(2,1,-2)$ לפי נוסחת פיתגורס למרחק בין שתי נקודות במרחב:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

נשים-לב כי ישר זה ניצב למישור המשיק למעגל, לכן כל שנוותר לעשות הוא לחסר את רדיוס המעגל

$$d - R = 3 - 1 = \boxed{2} \quad \text{וקיבלנו את המרחק הרצוי (!):}$$

להלן תמונת חתך של הספירה, המישור המשיק לה והמרחק ממנו לנקודה הנתונה.



אינטגרלים כפולים

שאלה מספר 69 – אינטגרל כפול בריבוע היחידה

תהי $f(x, y) \in C^2$ בכל המישור, המקיימת:

$$f(0,0)=1, \quad f(1,0)=2, \quad f(0,1)=3, \quad f(1,1)=4$$

חשב את האינטגרל הבא:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f_{xy}''(x, y) dx dy$$

פתרון

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [0,1]} f_{xy}''(x, y) dx dy &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=1} f_{xy}''(x, y) dy \right] dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=1} (f_x')_y dy \right] dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} [f_x'(x, y)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=1} [f_x'(x, 1) - f_x'(x, 0)] dx = \\ &= [f_x'(x, 1) - f_x'(x, 0)]_{x=0}^{x=1} = [f(1, 1) - f(1, 0)] - [f(0, 1) - f(0, 0)] = \\ &= f(1, 1) - f(0, 1) - f(1, 0) + f(0, 0) = 4 - 3 - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

שאלה מספר 70 – שטח תחום

חשב את שטח התחום D הבא:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, \frac{x\sqrt{3}}{3} \leq y \leq x\sqrt{3} \right\}$$

פתרון

נסמן את גודל השטח הכלוא בתחום D באות S . אזי רוצים לפתור את האינטגרל:

$$S = \iint_D 1 dx dy$$

שלב ראשון – התחום

(א) שרטוט התחום

הפונקציות $x^2 + y^2 = 1$ ו- $x^2 + y^2 = 25$ מתארות שני מעגלים שמרכזם בראשית בעלי רדיוסים $R = 1$ ו- $R = 5$ בהתאמה.

הפונקציות $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ו- $y = \sqrt{3}x$ מתארות שני ישרים העוברים בראשית ובעלי שיפועים $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ו- $\sqrt{3}$ בהתאמה.

נשים לב שהתחום הוא רק זה שנמצא ברביע הראשון ולא ברביע השלישי, מכיוון ש- $\frac{x\sqrt{3}}{3} \leq y \leq x\sqrt{3}$. כלומר השטח שנמצא מתחת לישר $\sqrt{3}x$ ומעל לישר $\frac{\sqrt{3}}{3}x$ בלבד (ברביע השלישי זה מתהפך).

(ב) ניסוח התחום בצורה של אי-שוויונות

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \right\} \quad \text{נסח את התחום מעט שונה:}$$

שלב שני – החלפת משתנים

(א) ניסוח המשתנים החדשים

$$\begin{cases} r = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{נוח להשתמש בקואורדינטות הפולריות:}$$

(ב) חישוב היעקביאן

$$J = r \quad \text{זוהי התמרה פולרית עם יעקביאן:}$$

שלב שלישי – התחום החדש

(א) ניסוח התחום החדש בצורה של אי-שוויונות

$$\Delta = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r^2 \leq 25, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \right\} \quad \text{נקבל את התחום:}$$

$$\Delta = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 5, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

(ב) שרטוט התחום

זהו מלבן במישור ההעתקה (r, θ) .

שלב רביעי – ניסוח האינטגרל ממחדש ופתרונו

$$\begin{aligned} \iint_D 1 dx dy &= \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^5 r dr \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_1^5 \right) d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{25-1}{2} \right) d\theta = \frac{24}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi \end{aligned}$$

שאלה מספר 71 – מסת תחום

נתון התחום D הבא:

$$D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

חשב את מסת התחום אם פונקציית צפיפות המסה שלו נתונה על-ידי: $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

פתרון

מסת התחום נתונה על-ידי האינטגרל:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

שלב ראשון – התחום

(א) שרטוט התחום

השוויון $x^2 + y^2 = 4$ מתאר מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו $R = 2$.

ננסח את השוויון $x^2 + y^2 = 2x$ מעט שונה:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

כלומר שוויון זה מתאר מעגל שמרכזו בנקודה $(1, 0)$ ורדיוסו $R = 1$.

לכן בסך הכל אי-השוויון $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4$ מתאר את השטח הנמצא בפנים המעגל $x^2 + y^2 = 4$ ובד בבד מחוצה למעגל $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(ב) ניסוח התחום בצורה של אי-שוויונות

נשים-לב כי השטח סימטרי סביב ציר x , לכן אפשר לחשב רק את השטח שמעל ציר ה- x ולכפול את האינטגרל כולו ב-2. גם נשים-לב כי השטח מורכב כעת משני שטחים:

ברביע הראשון: השטח הנמצא בפנים המעגל $x^2 + y^2 = 4$ ומחוץ למעגל $x^2 + y^2 = 2x$.

נסמן שטח זה ב- D_1 .

$$D_1 = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

ברביע השני: השטח שבפנים המעגל $x^2 + y^2 = 4$. נסמן שטח זה ב- D_2 .

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$

לכן בסך הכל צריך לפתור את האינטגרל:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \underbrace{2 \iint_{D_1} \rho(x, y) dx dy}_I + \underbrace{2 \iint_{D_2} \rho(x, y) dx dy}_II$$

שלב שני – החלפת משתנים

(א) ניסוח המשתנים החדשים

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{נוח להשתמש בקואורדינטות הפולריות:}$$

(ב) חישוב היעקביאן

$$J = r \quad \text{זוהי התמרה פולרית עם יעקביאן:}$$

שלב שלישי – התחום החדש

(א) ניסוח התחום החדש בצורה של אי-שוויונות

$$\Delta_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 2r \cos \theta \leq r^2 \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

נקבל את התחומים:

$$\Rightarrow \Delta_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \cos \theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ (r, \theta) \mid r^2 \leq 4, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta_2 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

(ב) שרטוט התחום

שלב רביעי – ניסוח האינטגרל ממחדש ופתרונו

נתחיל מאינטגרל II שהוא פשוט יותר:

$$II = 2 \iint_{D_2} \rho(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2 \iint_{\Delta_2} \frac{1}{r} dr d\theta = 2 \iint_{\Delta_2} dr d\theta =$$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^2 dr \right) d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

כעת נפתור את אינטגרל I:

$$I = 2 \iint_{D_1} \rho(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2 \iint_{\Delta_1} \frac{1}{r} dr d\theta = 2 \iint_{\Delta_1} dr d\theta =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2 \cos \theta}^2 dr \right) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2 \cos \theta) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) d\theta =$$

$$= 4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right] = 4 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(\sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \right] = 4 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = 2\pi - 4$$

ובסך הכל קיבלנו את מסת השטח:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = 2\pi - 4 + 2\pi = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$$

שאלה מספר 72 – תחום חסום

נתון תחום D ברביע הראשון החסום על-ידי העקומים:

$$y = \frac{1}{x}, y = \frac{3}{x}, x^2 - y^2 = -1, x^2 - y^2 = -9$$

חשב את האינטגרל הבא: $\iint_D 2xye^{x^2y^2}(x^2 + y^2) dx dy$

פתרון

שלב ראשון – התחום

(א) שרטוט התחום

הפונקציות $x^2 - y^2 = -1$, $x^2 - y^2 = -9$ הן היפרבולות "למעלה-למטה" עם אסימפטוטות $y = \pm x$

(באופן כללי להיפרבולה מהצורה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ יש אסימפטוטות $y = \pm \frac{b}{a}x$).

על-ידי הצבת ערך $x = 0$ אפשר לראות כי ברביע הראשון ההיפרבולה העליונה היא $x^2 - y^2 = -9$

(חותכת את ציר ה- y ב- $(0,3)$) והתחתונה היא $x^2 - y^2 = -1$ (חותכת את ציר ה- y ב- $(0,1)$).

(ב) ניסוח התחום בצורה של אי-שוויונות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}, -9 \leq x^2 - y^2 \leq -1 \right\}$$

שלב שני – החלפת משתנים

(א) ניסוח המשתנים החדשים

ננסח את התחום מעט שונה: $D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq xy \leq 3, -9 \leq x^2 - y^2 \leq -1 \right\}$

כעת נבצע את החלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

ב) חישוב היעקביאן

יותר פשוט כאן לחשב את היעקביאן ההופכי:

$$J^{-1} = \det \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2) \neq 0$$

$$|J| = \frac{1}{|J^{-1}|} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \quad \text{ומכאן היעקביאן (בערכו המוחלט):}$$

היינו מצפים לקבל את היעקביאן במשתנים החדשים (u, v) אבל אנחנו לא מתרגשים מזה שהרי אם נביט באינטגרל שעלינו לחשב נשים-לב כי יעקביאן זה בלאו-הכי סופו להצטמצם.

שלב שלישי – התחום החדש

ב) ניסוח התחום החדש בצורה של אי-שוויונות

$$\Delta = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 3, -9 \leq v \leq -1\} \quad \text{נקבל את התחום:}$$

א) שרטוט התחום - זהו מלבן במישור ההעתקה (u, v) .

שלב רביעי – ניסוח האינטגרל ממחדש ופתרון

$$\begin{aligned} \iint_D 2xye^{x^2y^2} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Delta} 2ue^{u^2} \cancel{(x^2 + y^2)} \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} 2ue^{u^2} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left[\int_{-9}^{-1} 2ue^{u^2} dv \right] du = \frac{1}{2} \int_1^3 [8 \cdot 2ue^{u^2}] du = 4 \int_1^3 [2ue^{u^2}] du = 4e^{u^2} \Big|_1^3 = 4(e^9 - e) \end{aligned}$$

שאלה מספר 73 – צפיפות משטחית

נתון תחום D ברביע הראשון החסום על-ידי העקומים:

$$y = \frac{1}{x}, y = \frac{3}{x}, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 9$$

חשב את מסת המשטח אם פונקציית צפיפות המסה המשטחית שלו היא $f(x, y) = x^2 + y^2$.

פתרון סעיף א'

שלב ראשון – התחום

(א) שרטוט התחום

הפונקציות $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$ הן היפרבולות "ימנה-שמאלה" עם אסימפטוטות $y = \pm x$

(באופן כללי להיפרבולה מהצורה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ יש אסימפטוטות $y = \pm \frac{b}{a}x$).

על-ידי הצבת ערך $y = 0$ אפשר לראות כי ברביע הראשון ההיפרבולה הימנית יותר היא $x^2 - y^2 = 9$

(חותכת את ציר ה- x ב- $(3, 0)$) והשמאלית לה היא $x^2 - y^2 = 1$ (חותכת את ציר ה- x ב- $(1, 0)$).

(ב) ניסוח התחום בצורה של אי-שוויונות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9 \right\}$$

שלב שני – החלפת משתנים

(א) ניסוח המשתנים החדשים

ננסח את התחום מעט שונה: $D = \{(x, y) \mid 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\}$

כעת נבצע את החלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

(ב) חישוב היעקביאן

יותר פשוט כאן לחשב את היעקביאן ההופכי:

$$J^{-1} = \det \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2) \neq 0$$

$$|J| = \frac{1}{|J^{-1}|} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \quad \text{ומכאן היעקביאן (בערכו המוחלט):}$$

היינו מצפים לקבל את היעקביאן במשתנים החדשים (u, v) אבל אנחנו לא מתרגשים מזה שהרי אם נביט באינטגרל שעלינו לחשב נשים-לב כי יעקביאן זה בלאו-הכי סופו להצטמצם.

שלב שלישי – התחום החדש

(ב) ניסוח התחום החדש בצורה של אי-שוויונות

$$\Delta = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 9\} \quad \text{נקבל את התחום:}$$

(א) שרטוט התחום - זהו מלבן במישור ההעתקה (u, v) .

שלב רביעי – ניסוח האינטגרל ממחדש ופתרון

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\Delta} \cancel{(x^2 + y^2)} \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} du dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$$

שאלה מספר 74 – החלפת סדר אינטגרציה

טיפ – סימון גבולות האינטגרציה

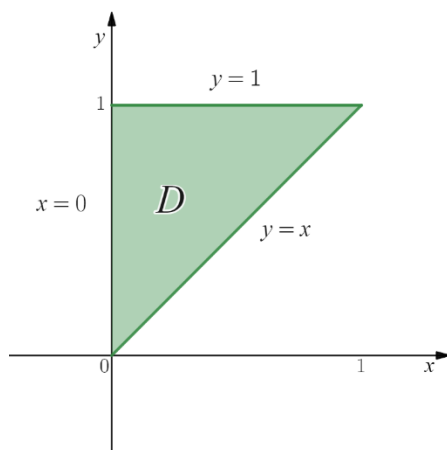
כדאי לסמן את גבולות האינטגרציה ב- $x =$ וב- $y =$,

$$\int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} dx \right) dy \quad \text{למשל כך:}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} dx \right) dy \quad \text{חשב את האינטגרל הבא:}$$

פתרון

גבולות האינטגרציה מספרים לנו כי המשתנה y כלוא בין הישר האופקיים $y = 0$ ו- $y = 1$ וכי המשתנה x כלוא בין הישר האנכי $x = 0$ והישר הלינארי $x = y$. נסמן את התחום שהתקבל ב- D :



נשים-לב שזהו תחום פשוט, כלומר ניתן לנסחו כתחום פשוט לפי x וכתחום פשוט לפי y .

תחום נקרא פשוט לפי y אם ניתן לרשום אותו באופן שבו x נמצא בין שני קבועים ו- y נמצא בין שתי פונקציות, הסיבה לכך היא שאנחנו למעשה לוקחים חתכים אנכיים של התחום (מקבילים לציר ה- y):

$$D = \{a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)\}$$

תחום נקרא פשוט לפי x אם ניתן לרשום אותו באופן שבו y נמצא בין שני קבועים ו- x נמצא בין שתי פונקציות, הסיבה לכך היא שאנחנו למעשה לוקחים חתכים אופקיים של התחום (מקבילים לציר ה- x):

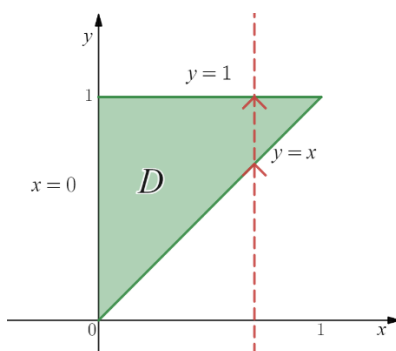
$$D = \{c < y < d, h_1(y) < x < h_2(y)\}$$

בתרגיל שלנו:

ננסח את התחום כפשוט לפי Y – ניקח חתכים אנכיים של התחום (כלומר מקבילים לציר ה- y , תסתכלו באיור למטה על הקו המקווקוו האדום). מכאן x נמצא בין שני קבועים ($0 < x < 1$) ו- y נמצא בין שתי פונקציות, הפונקציה הראשונה שהוא פוגש בכניסה אל התחום ($y = x$), והפונקציה הראשונה שהוא פוגש ביציאה מהתחום ($y = 1$). לכן בסך הכל נקבל את התחום:

$$D = \{0 < x < 1, x < y < 1\}$$

תחום D פשוט לפי y:

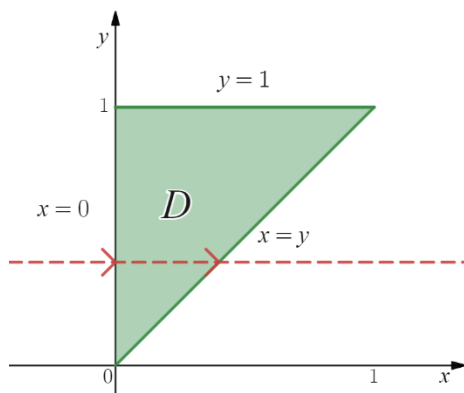


תחום D פשוט לפי Y

ננסח את התחום כפשוט לפי X – ניקח חתכים אופקיים של התחום (כלומר מקבילים לציר ה- x , תסתכלו באיור למטה על הקו המקווקוו האדום), מכאן y נמצא בין שני קבועים ($0 < y < 1$) ו- x נמצא בין שתי פונקציות, הפונקציה הראשונה שהוא פוגש בכניסה אל התחום ($x = 0$), והפונקציה הראשונה שהוא פוגש ביציאה מהתחום ($x = y$). לכן בסך הכל נקבל את התחום:

$$D = \{0 < y < 1, 0 < x < y\}$$

תחום D פשוט לפי x:



תחום D פשוט לפי X

כעת, נשים-לב כי האינטגרל המקורי **מנוסח כתחום פשוט לפי X** ולכן גם קשה לפתרון (כי חסרה לנו הנגזרת הפנימית $(1-x)$) ולכן נרצה להחליף סדר אינטגרציה **ולרשום את האינטגרל כתחום פשוט לפי Y**. כלומר אנחנו בעצם מסתמכים על השוויון הכללי הבא בהחלפת סדר אינטגרציה בתחום פשוט:

$$\int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y) dx \right) dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

$$D = \{c < y < d, h_1(x) < x < h_2(x)\} = \{a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)\}$$

ובתרגיל שלנו:

$$\int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} dx \right) dy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x}^{y=1} \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} dy \right) dx$$

$$D = \{0 < y < 1, 0 < x < y\} = \{0 < x < 1, x < y < 1\}$$

ומכאן האינטגרל הזה כבר פתיר מכיוון שהפונקציה באינטגרנד של y היא פונקציה של x , כלומר לא כלל לא תלויה ב- y ולכן גם יכולה "לצאת" מהאינטגרל ואז נקבל:

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x - \frac{1}{2}x^2} \cdot \left(\int_{y=x}^{y=1} 1 dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x - \frac{1}{2}x^2} \cdot (1-x) dx = \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{f^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{(1-x)}_{f'} dx = \frac{\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2^1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C : n \neq -1$$

שאלה מספר 75 – החלפת סדר אינטגרציה

חשב את האינטגרל הבא: $\int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx$

פתרון

נרשום את האינטגרל באופן יותר ברור עם סימון גבולות האינטגרציה ב- x ו- y :

$$\int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=0} \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx$$

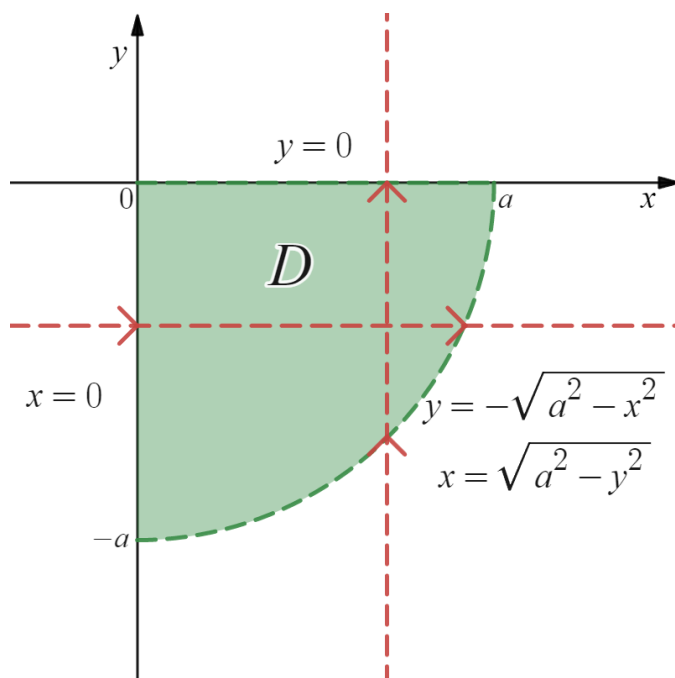
נשים לב כי תחום האינטגרל מנוסח כפשוט לפי y (x חסום בין שני מספרים ו- y בין שתי פונקציות):

$$D = \left\{ 0 < x < a, -\sqrt{a^2-x^2} < y < 0 \right\}$$

כמו-כן נשים לב כי התקבל רבע מעגל (כי $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = -\sqrt{a^2-x^2}$ וזו משוואת מעגל, ובפרט הסימן מינוס מורה על חצי המעגל התחתון ומכיון ש- $x > 0$ מתקבל רבע מעגל ברביע השני כבאיור למטה).

כעת ננסח את התחום כפשוט לפי x (נשים לב כי כאשר מבדדים את x לוקחים את משוואת המעגל בסימן פלוס המורה על חצי המעגל הימני, ומכיון ש- $y < 0$ מתקבל אותו רבע המעגל הרצוי כבאיור):

$$D = \left\{ -a < y < 0, 0 < x < \sqrt{a^2-y^2} \right\}$$



ועכשיו נוכל לפתור את האינטגרל:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=0} \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx &= \int_{y=-a}^{y=0} \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_{y=-a}^{y=0} \sqrt{a^2-y^2} \cdot \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} 1 dx \right) dy = \int_{-a}^0 \sqrt{a^2-y^2} \left(\sqrt{a^2-y^2} \right) dy = \\ &= \int_{-a}^0 (a^2-y^2) dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-a}^0 = 0 - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2a^3}{3} \end{aligned}$$